Inferensia dan Perbandingan Vektor Nilai Tengah

Perbandingan Kasus Peubah Tunggal dan Peubah Ganda

	Peubah Tunggal	Peubah Ganda
Penduga titik parameter nilai tengah	Skalar	Vektor nilai tengah
Penduga selang nilai tengah	Selang Kepercayaan	Daerah (elips) Kepercayaan
Pengujian hipoteis nilai tengah satu populasi	Uji t-student	Uji T^2-Hotelling
Pengujian beda nilai tengah dua populasi	Uji t-student	Uji T^2-Hotelling
Pengujian beda nilai tengah beberapa populasi	ANOVA	MANOVA

Pengujian Hipotesis: Vektor Nilai Tengah

Bentuk Hipotesis

Hipotesis yang diuji dalam pengujian vektor nilai tengah populasi mirip seperti pada kasus univariate, yaitu:

H_0: $\underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ vs H_1: $\underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$

Dengan,

$$\underset{(p x 1)}{\mu_0} = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \vdots \\ \mu_{p0} \end{bmatrix}$$

Statistika uji untuk vektor nilai tengah

Statistik uji yang dapat digunakan dalam pengujian vektor nilai tengah populasi adalah (1) T^2-Hotelling dan (2) Wilk-lambda.

1. T^2-Hotelling, sebagai berikut:

$$T^2 = \left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right)' \left(\frac{1}{n} S\right)^{-1} \left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right) = n\left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right)' S^{-1} \left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right)$$

Dengan,

$$\underset{(px1)}{\underline{\bar{X}}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j \qquad \underset{(pxp)}{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{X}_j - \underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_j - \underline{\bar{X}}\right)'$$

2. Uji Wilk-Lambda, sering juga disebut uji rasio kemungkinan (likelihood ratio test)

$$\Lambda = \frac{\max_{\Sigma} L(\underline{\mu}_0, \Sigma)}{\max_{\underline{\mu},\Sigma} L(\underline{\mu}, \Sigma)} = \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{n/2}$$

dengan,

$$L(\underline{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}|^{n/2}} e^{-np/2}$$

$$L(\underline{\mu}_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}_0|^{n/2}} e^{-np/2}$$

Hubungan Hotelling dengan Wilk - Lambda,

$$\Lambda^{2/n} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1}$$

Daerah Penolakan H_0

Daerah penolakan untuk hipotesis nol dapat dihampiri dengan menggunakan sebaran F, sebagai berikut:

$$T^2 = \left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right)'\left(\frac{1}{n}S\right)^{-1}\left(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0\right) > \frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)$$

Untuk ukuran sampel besar maka T^2-Hotelling dapat juga dihampiri dengan sebaran khi-kuadrat berderajat bebas p.

Makna Penolakan H_0

- Jika hipotesis nol ditolak itu artinya bahwa paling sedikit ada satu kombinasi linier peubah yang rata-ratanya berada diluar selang kepercayaan $(1-\alpha)$.
- Perlu uji lanjut, yaitu:
  - Daerah kepercayaan ganda, dapat disajikan dalam bentuk Ellips.
  - Selang kepercayaan simultan
  - Selang kepercayaan Bonferoni

ILUSTRASI

Perspirasi dari 20 wanita yang tergolong sehat dianalisa. Tiga komponen, yaitu X_1 = laju perspirasi, X_2 = kandungan sodium dan X_3 = kandungan potasium diukur

Ujilah apakah hipotesis H_0: $\underline{\mu}' = [4, 50, 10]$ lawan H_1: $\underline{\mu}' \neq [4, 50, 10]$ pada taraf nyata $\alpha = 0.10$

Ringkasan Data

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.010 & -1.810 \\ 10.010 & 199.788 & -5.640 \\ -1.810 & -5.640 & 3.628 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} .586 & -.022 & .258 \\ -.022 & .006 & -.002 \\ .258 & -.002 & .402 \end{bmatrix}$$

Perhitungan T^2-Hotelling

$$T^2 = 20\begin{bmatrix} 4.640-4 & 45.400-50 & 9.965-10 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} .586 & -.022 & .258 \\ -.022 & .006 & -.002 \\ .258 & -.002 & .402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.640-4 \\ 45.400-50 \\ 9.965-10 \end{bmatrix} = 9.74$$

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(.10) = \frac{19(3)}{17} F_{3,17}(.10) = 3.353(2.44) = 8.18$$

Terlihat bahwa $T^2 = 9.74 > 8.18$, sehingga konsekuensinya kita tolak H_0 pada taraf nyata 10%.

Daerah (ellips) Kepercayaan bagi Vektor Nilai Tengah

Daerah (ellips) Kepercayaan

Suatu daerah kepercayaan 100(1-α)% bagi nilai tengah suatu sebaran normal ganda p adalah suatu elips yang ditentukan oleh semua μ sedemikian rupa sehingga

$$n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)' S^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

di mana

$$\underset{(px1)}{\underline{\overline{X}}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j \qquad \underset{(pxp)}{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}}\right)'$$

dan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ adalah pengamatan contoh.

ILUSTRASI

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} .564 \\ .603 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} .0144 & .0117 \\ .0117 & .0146 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix}$$

ellips kepercayaan 95% bagi μ terdiri dari semua nilai (μ_1, μ_2) yang memenuhi

$$42\begin{bmatrix} .564-\mu_1 & .603-\mu_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .564-\mu_1 \\ .603-\mu_2 \end{bmatrix} \le \frac{2(41)}{40}F_{2,40}(.05)$$

Mencari Akar dan Vektor Ciri

Pasangan akar ciri dan vektor ciri bagi **S** adalah

$\lambda_1 = .026 \quad \underline{\mathbf{e}}_1' = [.704, .710]$

$\lambda_2 = .002 \quad \underline{\mathbf{e}}_2' = [-.710, .704]$

Pusat ellips tersebut pada titik [.564, .603]

Hitung Panjang Sumbu

setengah dari panjang sumbu mayor dan minornya masing-masing adalah:

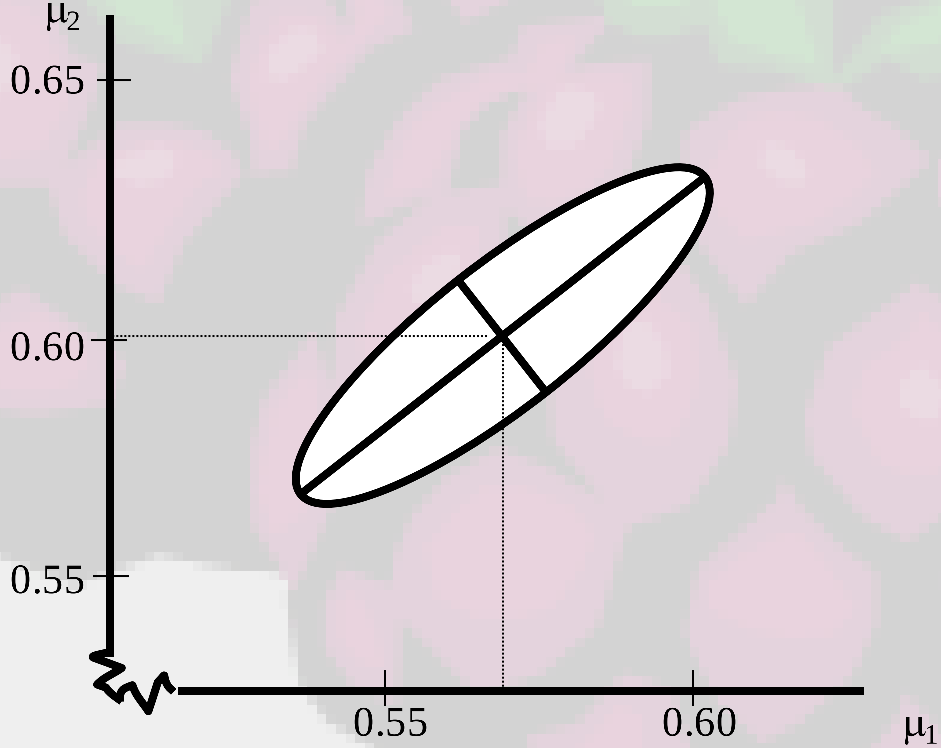
$$\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{.026}\sqrt{\frac{2(41)}{(42)(40)}(3.23)} = .064$$

$$\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{.002}\sqrt{\frac{2(41)}{(42)(40)}(3.23)} = .018$$

Sumbu-sumbu tersebut teletak sepanjang $\underline{\mathbf{e}}_1$' = [.704, .710] dan $\underline{\mathbf{e}}_2$' = [-.710, .704]

Menggambar Ellips Kepercayaan

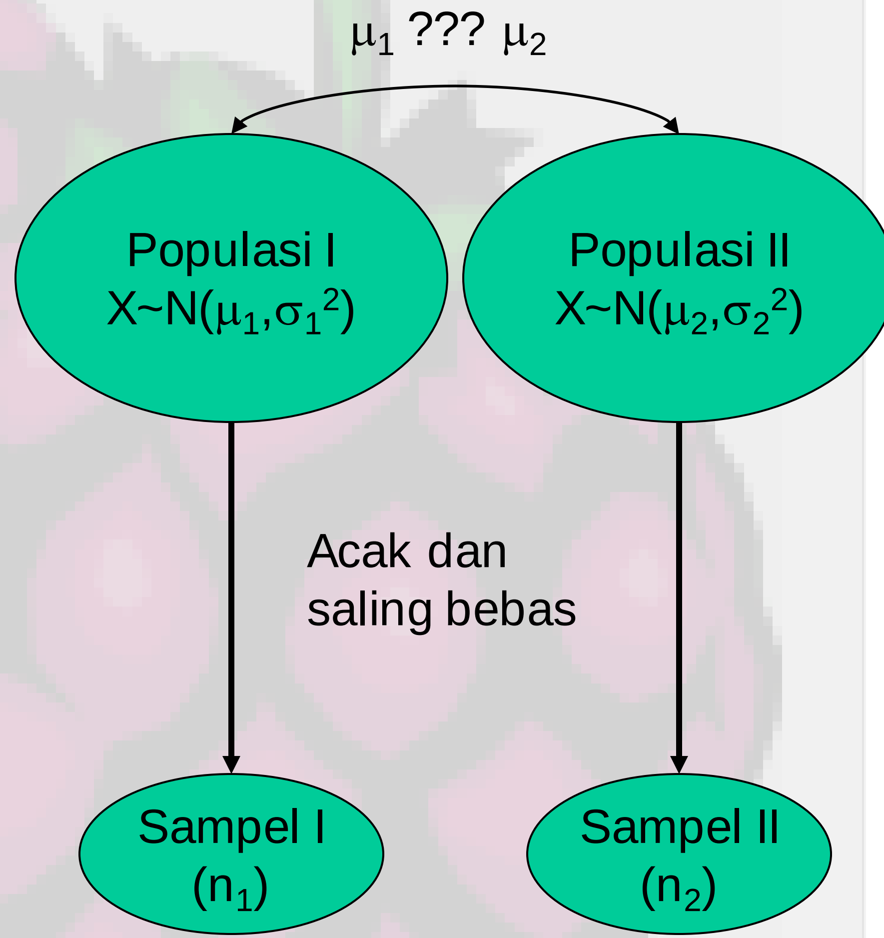
Menggambar Elips Kepercayaan



Pengujian Hipotesis: Perbandingan Vektor Nilai Tengah

Kasus Dua Sample Saling Bebas

- Setiap populasi diambil sampel acak berukuran tertentu (bisa sama, bisa juga tidak sama)
- Pengambilan kedua sampel saling bebas
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



Deskripsi masing-masing sampel

Multivariate:

Ukuran Pemusatan dan Penyebaran

Misal:

vektor peubah acak untuk sampel 1 adalah $\underline{x}_1' = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p})$ dan vektor peubah acak sampel 2 adalah $\underline{x}_2' = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2p})$

$$\underline{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \underline{\mathbf{x}}_{1j} \qquad \mathbf{S}_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1} \left(\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}_1\right)\left(\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}_1\right)'$$

$$\underline{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} \underline{\mathbf{x}}_{2j} \qquad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_1} \left(\mathbf{x}_{2j} - \bar{\mathbf{x}}_2\right)\left(\mathbf{x}_{2j} - \bar{\mathbf{x}}_2\right)'$$

Langkah Pengujiannya

Bentuk Hipotesis: H_0: $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ vs H_1: $\underline{\mu}_1 \neq \underline{\mu}_2$.

Statistik uji:

a. Ragam sama

$$T^2 = \left(\bar{\underline{\mathbf{x}}}_1 - \bar{\underline{\mathbf{x}}}_2\right)' \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S_{gab}\right]^{-1} \left(\bar{\underline{\mathbf{x}}}_1 - \bar{\underline{\mathbf{x}}}_2\right)$$

$$S_{gab} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Daerah penolakan H0: $T^2 \geq c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - p - 1)} F_{p,n1+n2-p-1}(\alpha)$

Statistik uji:

a. Ragam tidak sama (Gunakan matriks kovarian masing-masing sample

$$T^2 = (\bar{\underline{\mathbf{x}}}_1 - \bar{\underline{\mathbf{x}}}_2)' \left[\left(\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2} \right) \right]^{-1} (\bar{\underline{\mathbf{x}}}_1 - \bar{\underline{\mathbf{x}}}_2)$$

Daerah penolakan H0:

$$T^2 \geq c^2 = \chi^2_{(\alpha, p)}$$

Ilustrasi

Misal:

x_1=lebar badan kura-kura; x_2=panjang badan kura-kura

Sampel 1: (n_1=24)

$$\underline{\bar{x}}_J = \begin{bmatrix} 102.583 \\ 52.042 \end{bmatrix} \qquad S_J = \begin{bmatrix} 171.732 & 101.844 \\ 101.844 & 64.737 \end{bmatrix}$$

Sampel 2: (n_2=24)

$$\underline{\bar{x}}_B = \begin{bmatrix} 88.292 \\ 40.708 \end{bmatrix} \qquad S_B = \begin{bmatrix} 50.042 & 21.654 \\ 21.654 & 11.259 \end{bmatrix}$$

Hipotesis :

$$H_0 : \underline{\mu}_J = \underline{\mu}_B \quad H_1 : \underline{\mu}_J \neq \underline{\mu}_B$$

- Kasus ragam sama

$$T^2 = \left(\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2\right)' \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S_{gab}\right]^{-1} \left(\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2\right)$$

$$S_{gab} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad S_{gab} = \begin{bmatrix} 110.887 & 61.749 \\ 61.749 & 37.998 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2 = \begin{bmatrix} 14.292 \\ 11.333 \end{bmatrix} \qquad S_{gab}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.095 & -0.154 \\ -0.154 & 0.277 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = [14.292 \quad 11.333]\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right)\begin{bmatrix} 0.0945 & -0.154 \\ -0.154 & 0.277 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14.292 \\ 11.333 \end{bmatrix} = 4.995 x \frac{24}{2}$$

- Tolak Ho, jika

$$T^2 > c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - p - 1)} F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(.01) = \frac{(46)2}{45}(2.44) = 4.988$$

- Kasus ragam tidak sama

$$T^2 = (\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2)'\left[\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}\right]^{-1}(\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2)$$

$$T^2 = \begin{bmatrix}14.292 & 11.333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}57.197 & 25.898 \\ 25.898 & 13.956\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}14.292 \\ 11.333\end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix}14.292 & 11.333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.109 & -0.203 \\ -0.203 & 0.448\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14.292 \\ 11.333\end{bmatrix} = 14.170$$

- Tolak Ho, jika

$$T^2 > \chi^2_{(0.05;2)} = 5.99$$