# ANALISIS PEUBAH GANDA (MULTIVARIATE ANALYSIS)

## PENGENALAN MATRIKS

DEPARTEMEN STATISTIKA
DR. IR. I MADE SUMERTAJAYA, MSI

- Definisi Matriks

Susunan angka-angka di dalam kotak yang dibagi ke dalam baris dan kolom.

Misalkan terdiri dari n baris dan p kolom, maka matriks tersebut berdimensi n x p.

contoh :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 12 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

- Matriks Putaran

Diperoleh dengan cara menukar baris dan kolomnya, dinotasikan dengan A'.

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Matriks Simetrik

Jika A = A' maka A adalah matriks simetrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks Diagonal

  Jika matriks n x n yang semua unsur nondiagonalnya bernilai nol, disebut matriks diagonal.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriks Khusus

  - matriks identitas

  - matriks nol

  - matriks segitiga

- Kebebasan Linier

  Sekumpulan vektor kolom atau baris tak nol dikatakan bebas linier jika tidak ada satupun yang bisa dituliskan sebagai kombinasi linier dari vektor lainnya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

- Pangkat Matriks

  Banyaknya baris atau kolom pada matriks itu yang bersifat bebas linier.

  pada matriks di atas berpangkat r(A)=2

- Matriks Singular dan Nonsingular

  Matriks A n x n dikatakan singular jika semua baris atau kolomnya saling bebas linier.

- Kebalikan Matriks

  Untuk matriks persegi A, jika berlaku

  AB = BA= I, maka B adalah matriks kebalikan dari A, dinotasikan $A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix}$$

## Normal Vektor Euclidian

Sebuah vektor $\underline{a}$ berukuran n x 1 memiliki panjang yang didefinisikan sebagai :

$$\sqrt{\underline{a}'\underline{a}}$$

Dan vektor normal dari $\underline{a}$ $=a/\sqrt{\underline{a}'\underline{a}}$ memiliki norma $\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

$$\underline{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

- Jarak Euclid antar Dua Vektor

  Jika dua buah vektor a dan b berukuran n x 1 maka jarak euclid:

$$d(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{(\underline{a}-\underline{b})'(\underline{a}-\underline{b})}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$d(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{(5-6)^2 + (3-1)^2 + (2-4)^2} = 3$$

## Vektor dan Matriks Ortogonal

Dua buah vektor berukuran n x 1 dikatakan ortogonal satu sama lain jika $\underline{a}'\underline{b}=0$.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks A berukuran n x n adalah matriks ortogonal jika A'A=AA'=I.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

- Akar Ciri dan Vektor Ciri

Untuk matriks A berukuran n x n maka pasangan-pasangan $(\lambda_1, x_1), \ldots, (\lambda_n, x_n)$ dikatakan sebagai pasangan akar ciri dan vektor ciri yang ortonormal jika berlaku:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = \lambda_n x_n$$

Atau memenuhi $\det(Ax - \lambda I x) = 0$

- Penguraian Spektral dari Sebuah Matriks Simetrik

$$A=P\Lambda P'$$

dengan A adalah matriks simetrik *n x n*, P adalah suatu matriks ortogonal dan $\Lambda$ adalah matriks diagonal. $P=(x_1|x_2|\ldots|x_n)$ dan $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

- Determinan Matriks

yaitu perkalian dari seluruh akar ciri dari matriks persegi n x n A, $|A|= \lambda_1 x \ldots . x\ \lambda_n$

- Teras Matriks

teras dari matriks A n x n, tr(A) adalah penjumlahan semua akar cirinya.

$tr(A)= \lambda_1+ \ldots .+\lambda_n$ , yang sebanding dengan jumlah dari semua unsur diagonal utamanya.

- Bentuk Kuadratik

Misal A adalah matrik berukuran n x n dan x adalah vektor peubah berukuran n x 1 maka:

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + (a_{12} + a_{21})x_1 x_2 + \ldots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

Bentuk itu adalah bentuk kuadratik dari x.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

$$maka$$

$$x'Ax = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

- Matriks Definit dan Semidefinit Positif

Matriks simetrik berukuran n x n bersifat:

-definit positif jika

$x'Ax > 0$ untuk sembarang vektor $x \neq 0$

-semidefinit positif jika

$x'Ax \geq 0$ untuk sembarang vektor $x \neq 0$

- Akar Kuadratik Matrik Semidefinit Positif

A=matrik semidefinit positif, diperoleh matriks Δ atas U sehingga

$A=U'U$ (penguraian Cholesky)

Akar kuadrat dari matrik simetrik:

$A=P\Lambda P'=(P\Lambda^{1/2}P')(P\Lambda^{1/2}P')=A^{1/2}A^{1/2}$

dimana P matrik ortogonal dan Λ matriks diagonal.

- Perkalian Kronecker

Perkalian Kronecker C denganD dinotasikan

$$C \otimes D$$

Yaitu dengan mengalikan setiap unsur matriks C dengan matriks D, dan kemudian membuat matriks gabungannya.

contoh:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad C \otimes D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 9 & 12 \\ 7 & 0 & 21 & 28 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 3 & -3 \\ 0 & 28 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 7 & -21 & 14 \end{bmatrix}$$

# MATRIKS DALAM MULTIVARIATE

**Untuk banyaknya pengamatan (observasi) sebesar n dan banyaknya peubah sebesar p, matriks datanya dituliskan**

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} X'1$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{n-1} X' \left( I - \frac{1}{n} 11' \right) X$$

$$\underset{(p\times p)}{D}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \sqrt{s_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(p\times p)}{D}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix}$$

This image cannot currently be displayed.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{11}}} & \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} & \dots & \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{pp}}} & \frac{s_{2p}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{pp}}} & \dots & \frac{s_{pp}}{\sqrt{s_{pp}}\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$R = D^{-1/2} S D^{-1/2}$ atau

$S = D^{1/2} R D^{1/2}$

Jika vektor $\underline{a}$ dikalikan terhadap X sehingga membentuk kombinasi linier dari X, maka

Rataan ($\underline{a}'X$) = $\underline{a}'\bar{x}$

Ragam ($\underline{a}'X$) = $\underline{a'}S\underline{a}$

Ragam ($\underline{a}'X$ dan $\underline{b'X}$) = $\underline{a'}S\underline{b}$

# Partisi Matriks

$$\underset{(p x 1)}{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_q \\ --- \\ \bar{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ --- \\ \bar{x}^{(2)} \end{bmatrix}$$

This image cannot currently be displayed.

$$\underset{(pxp)}{S_n} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} s_{11} & \cdots & s_{1q} & s_{1,q+1} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{q1} & \cdots & s_{qq} & s_{q,q+1} & \cdots & s_{qp} \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ s_{q+1,1} & \cdots & s_{q+1,q} & s_{q+1,q+1} & \cdots & s_{q+1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pq} & s_{p,q+1} & \cdots & s_{pp} \end{array}\right]$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ \\ p-q \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} s_{11} & s_{12} \\ -- & -- \\ s_{21} & s_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

# TERIMAKASIH