Materi 1 : Review Statistika Inferensia
Pengujian Hipotesis

PERANCANGAN PERCOBAAN

Pendahuluan

- Suatu pernyataan / anggapan yang mempunyai nilai mungkin benar / salah atau suatu pernyataan /anggapan yang mengandung nilai ketidakpastian → Hipotesis
- Hipotesis dalam statistika dinyatakan dalam dua bentuk yaitu:
  - H_0 (hipotesis nol): suatu pernyataan / anggapan yang umumnya ingin kita tolak
  - H_1 / H_A (hipotesis alternatif): pernyataan lain yang akan diterima jika H_0 ditolak

Kesalahan dalam Keputusan

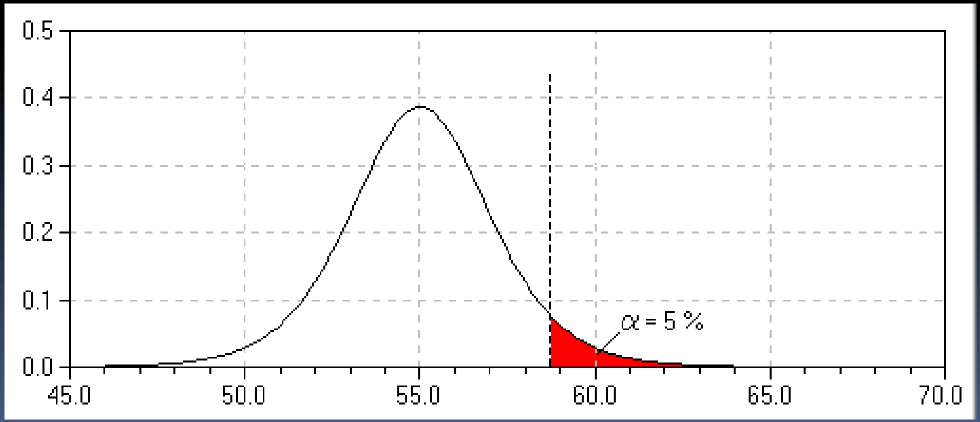
- Pengambilan keputusan akan memunculkan dua jenis kesalahan yaitu:
  - Salah jenis I (Error type I) : kesalahan akibat menolak H_0 padahal H_0 benar
  - Salah jenis II (Error type II) : kesalahan akibat menerima H_0 padahal H_1 benar

- Besarnya peluang kesalahan dapat ini dapat dihitung sebagai berikut:
  - P(salah jenis I) = P(tolak H_0 | H_0 benar) = α
  - P(salah jenis II) = P(terima H_0 | H_1 benar) = β

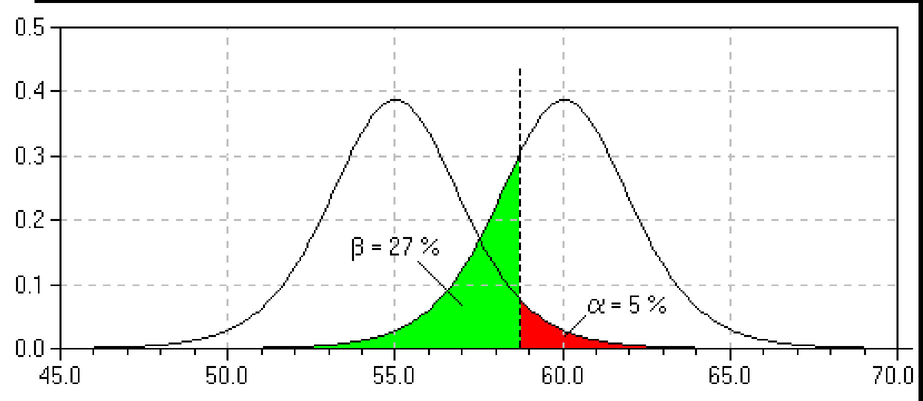
	H_0 benar	H_0 salah
Tolak H_0	Peluang salah jenis I (Taraf nyata; α)	Kuasa pengujian ($1-\beta$)
Terima H_0	Tingkat kepercayaan ($1-\alpha$)	Peluang salah jenis II (β)

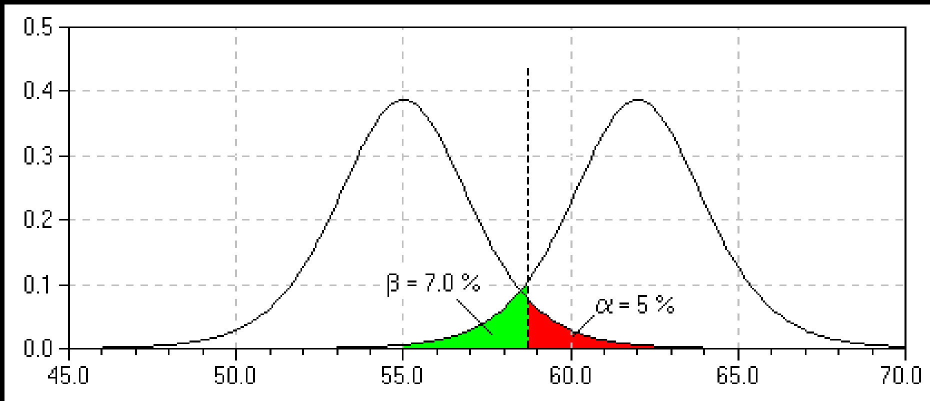
Pengaruh nilai α dan β

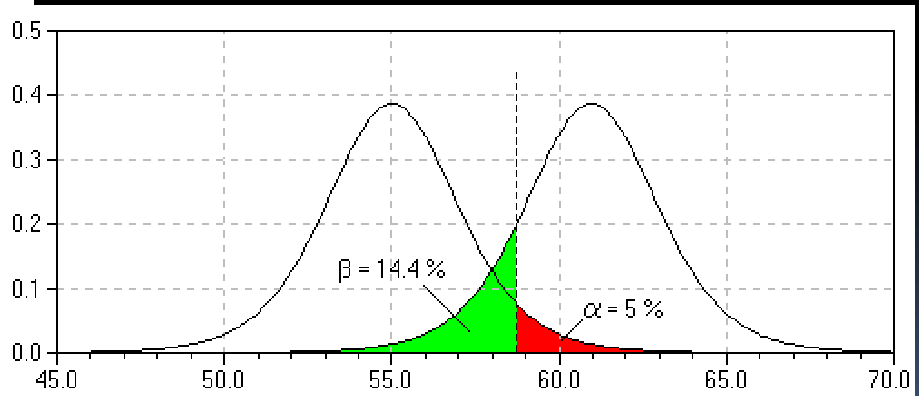
- Teladan : Andaikan suatu perusahaan A akan menerima dari suplier apabila produknya minimal mengandung 55% zat X. Untuk meyakinkan maka diambil 9 contoh (dgn asumsi simpangan baku sebesar 2%).

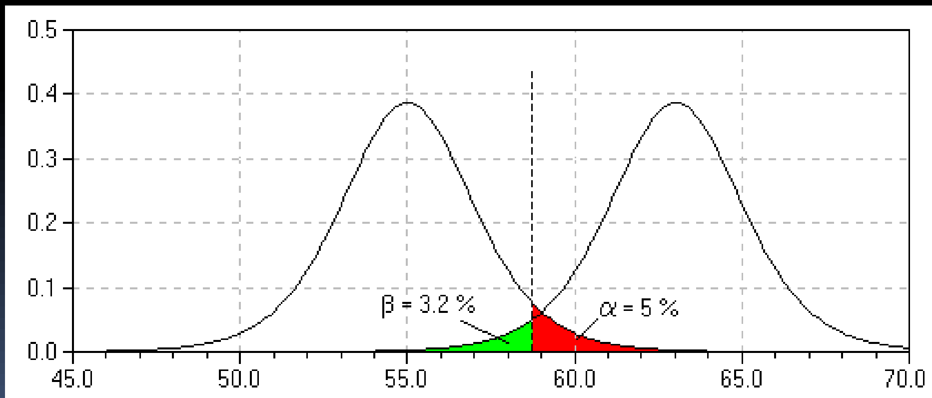


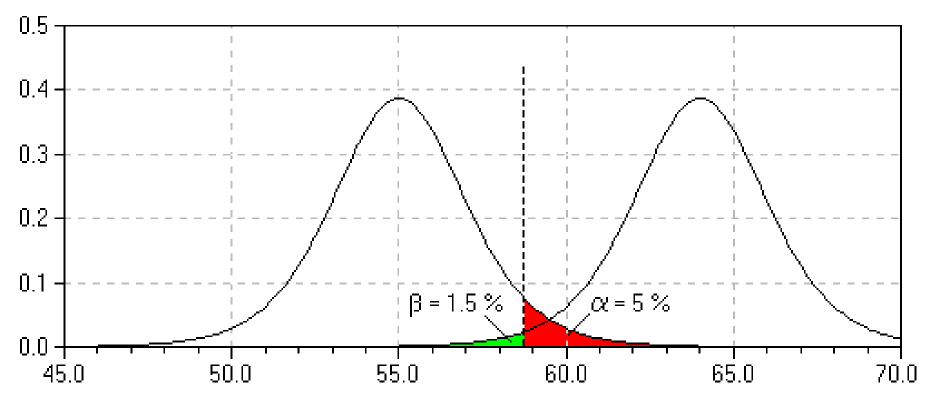
- Sisi Suplier : Ingin semua diterima



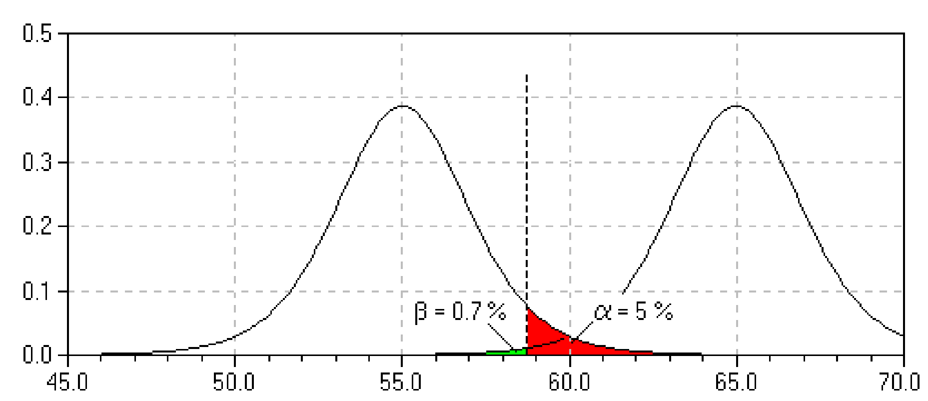




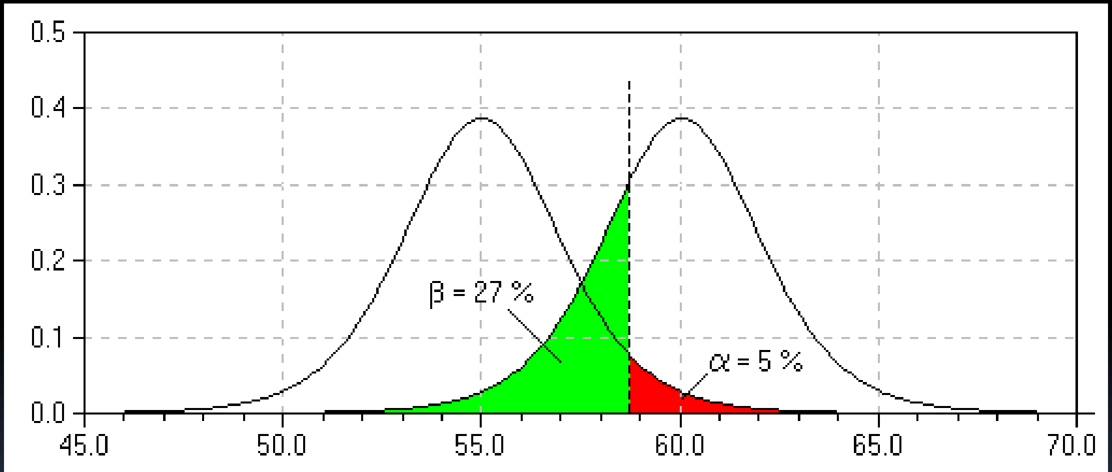


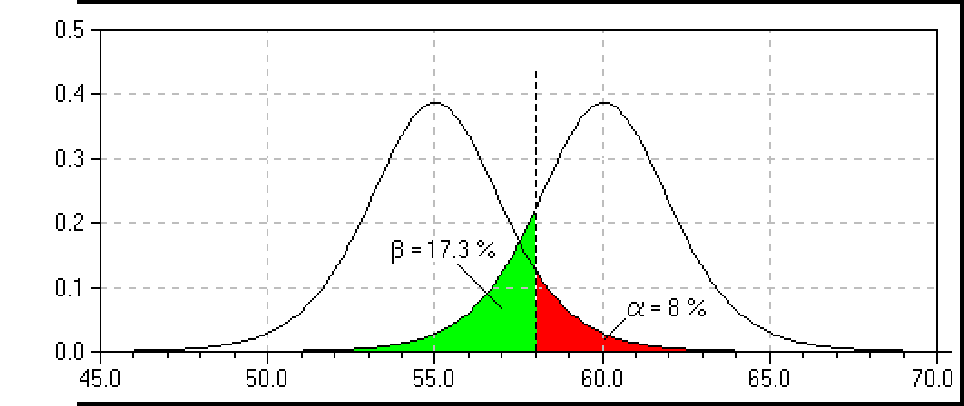


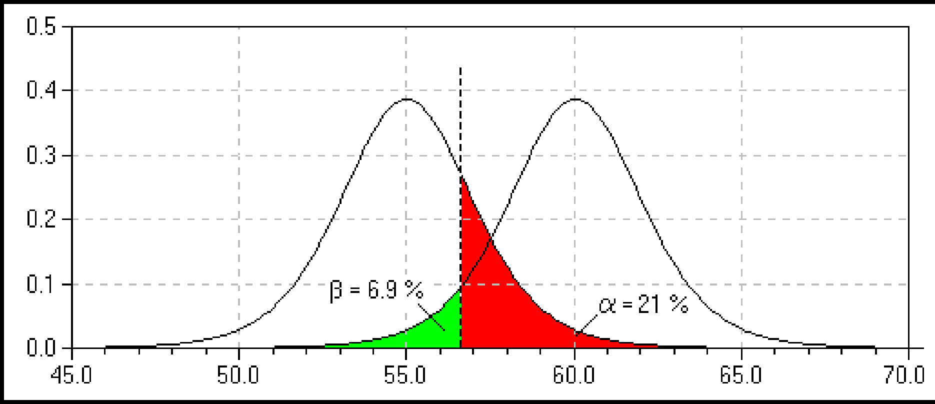
Dengan μ=65% hampir semua kiriman suplier diterima.

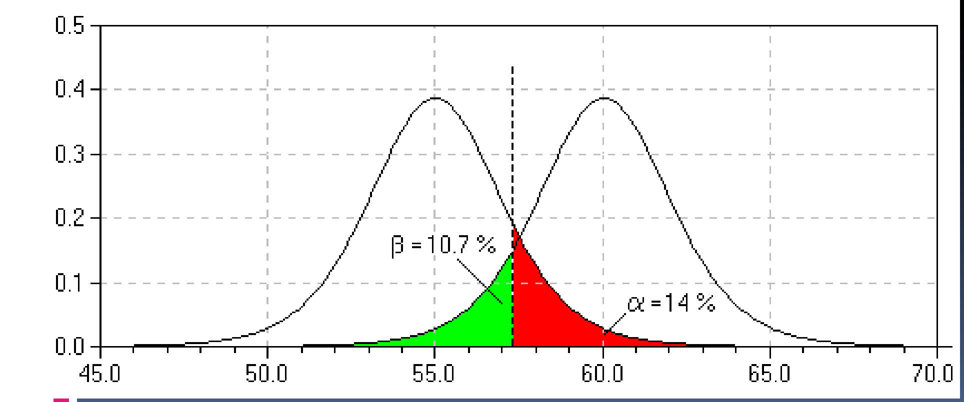


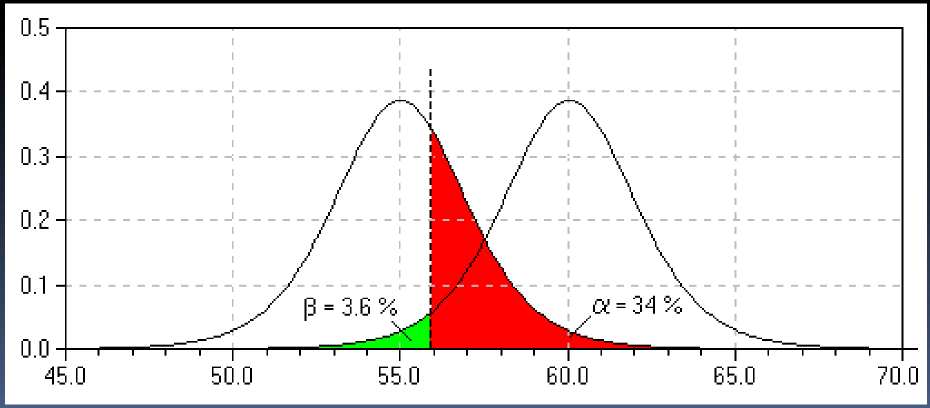
- Kondisi ini tentu tidak menguntungkan suplier. Bagaimana apabila kriteria β diturunkan?



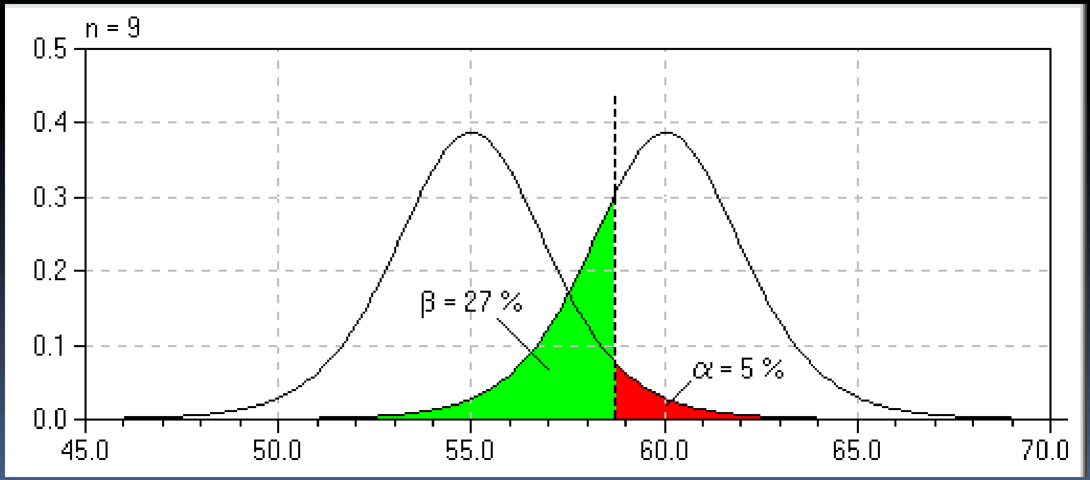

β = 17.3 %
α = 8 %

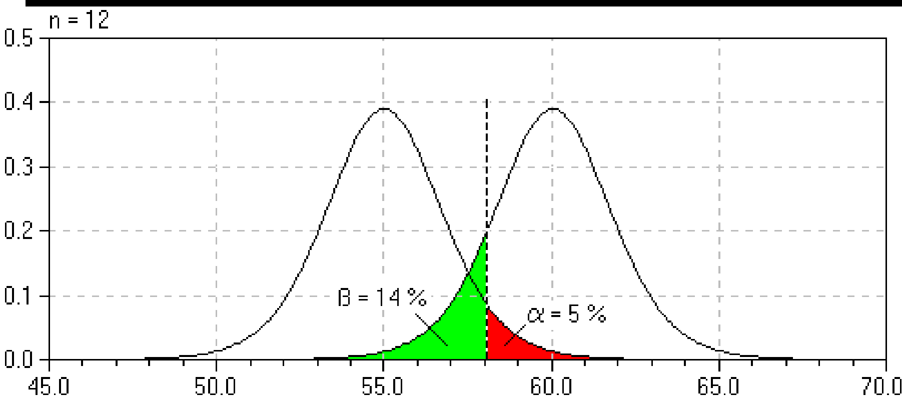

β = 6.9 %
α = 21 %

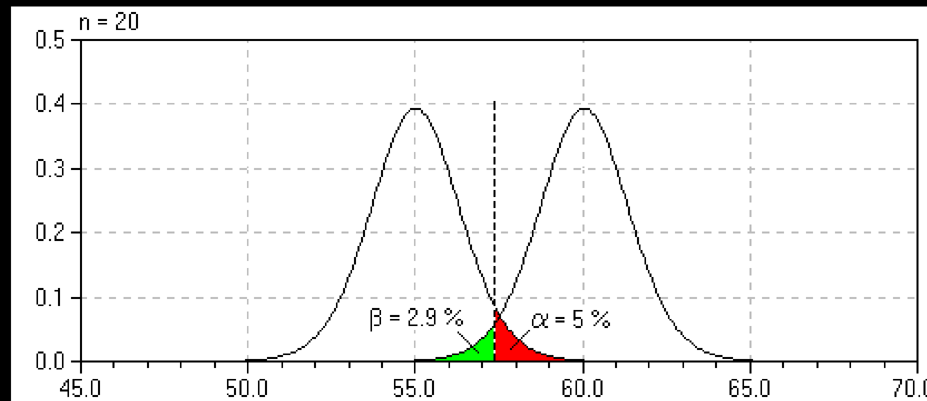

β = 10.7 %
α = 14 %

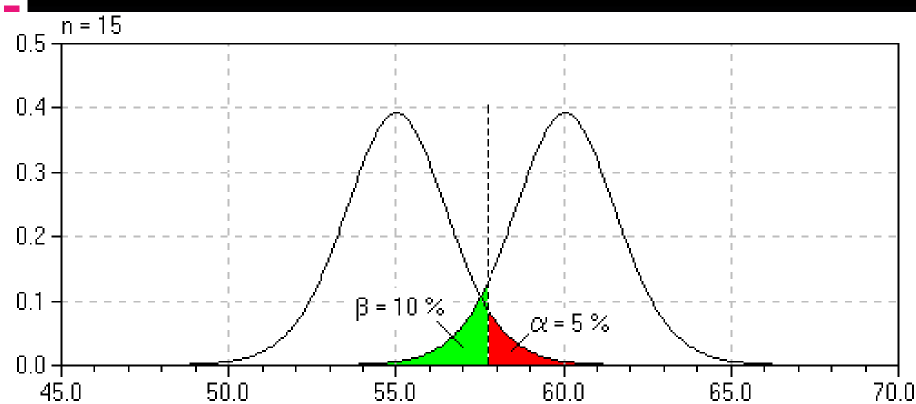

β = 3.6 %
α = 34 %

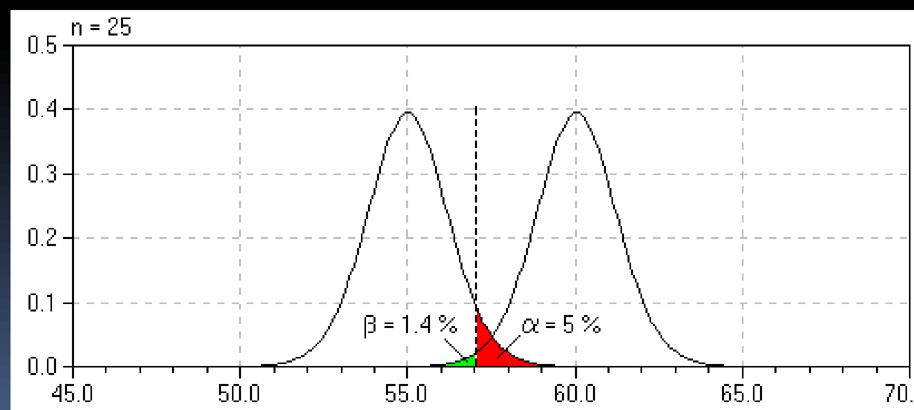
- Terlihat bahwa apabila beta diperkecil dgn kondisi yg lain tetap → Tidak menguntungkan sisi konsumen
- Bagaimana supaya menurunkan keduanya?



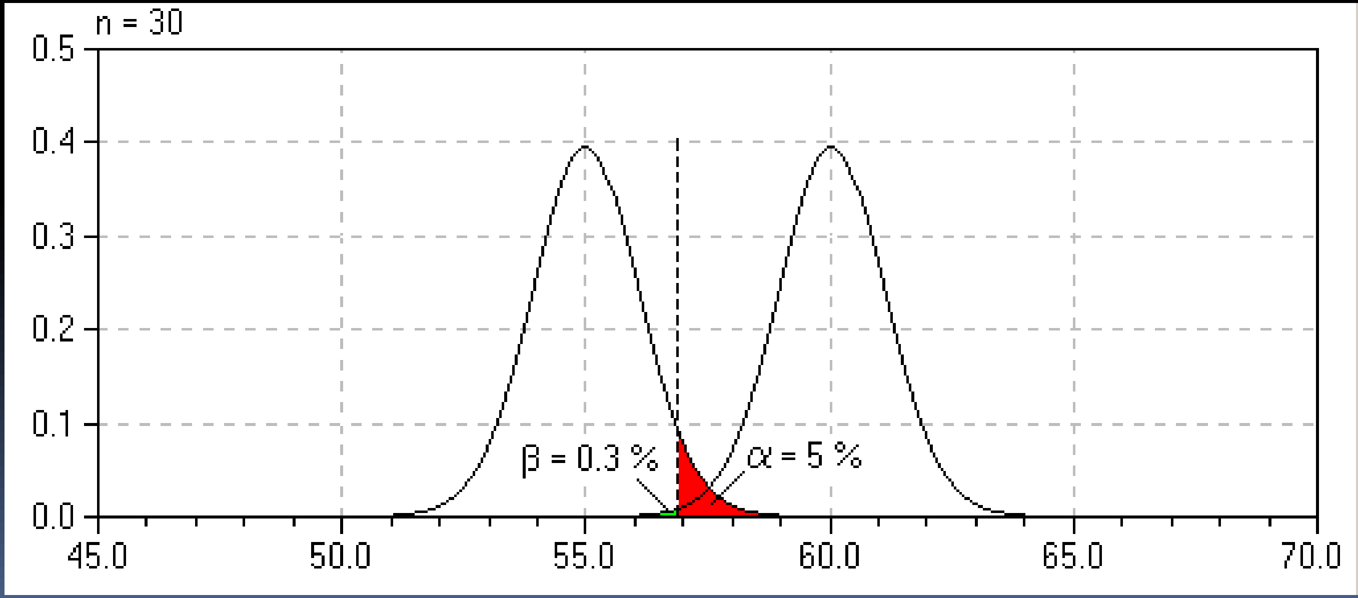

n = 12
β = 14 %
α = 5 %
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
45.0
50.0
55.0
60.0
65.0
70.0


n = 20
β = 2.9 %
α = 5 %
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
45.0
50.0
55.0
60.0
65.0
70.0


n = 15
β = 10 %
α = 5 %
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
45.0
50.0
55.0
60.0
65.0
70.0


n = 25
β = 1.4 %
α = 5 %
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
45.0
50.0
55.0
60.0
65.0
70.0

- Untuk menurukan kedua-duanya secara simultan → hanya ada satu cara yaitu dengan meningkatkan banyaknya contoh



Teladan Menghitung Nilai α dan β

contoh berukuran 25 diambil secara acak dari populasi normal(μ;σ^2 = 9).

Hipotesis yang akan diuji,

$H_0 : \mu = 15$

$H_1 : \mu = 13$

Tolak H_0 jika rata-rata kurang dari atau sama dengan 13.5

Berapakah besarnya kesalahan jenis I dan II ?

Jawab:

P(salah jenis I) $= P(\text{tolak } H_0 | \mu = 15)$

$= P(x \leq 13.5)$

$= P(z \leq (13.5-15)/(3/\sqrt{25}))$

$= P(z \leq -2.5) = 0.0062$

P(salah jenis II) $= P(\text{terima } H_0 | \mu = 13)$

$= P(x \geq 13.5)$

$= P(z \geq (13.5-13)/(3/\sqrt{25}))$

$= P(z \geq 0.83)$

$= 1 - P(z \leq 0.83) = 0.2033$

- Sayangnya kita tahu bahwa parameter populasi sering kali tidak diketahui
- Sehingga dalam pengujian hipotesis hanya nilai salah jenis I (α) yang dapat dikendalikan.
- Akan timbul pertanyaan :
  – Berapa nilai α yang digunakan?

Tergantung resiko keputusan yang akan diambil

Langkah-langkah Dalam Pengujian Hipotesis

Beberapa langkah yang perlu diperhatikan dalam pengujian hipotesis:

(1) Tuliskan hipotesis yang akan diuji

Ada dua jenis hipotesis:

- Hipotesis sederhana

  Hipotesis nol dan hipotesis alternatif sudah ditentukan pada nilai tertentu

  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$
  - $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$
  - $H_0 : P = P_0$ vs $H_1 : P = P_1$

- Hipotesis majemuk

  Hipotesis nol dan hipotesis alternatif dinyatakan dalam interval nilai tertentu

  b.1. Hipotesis satu arah

  - $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$

  b.2. Hipotesis dua arah

  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

(2). Tetapkan tingkat kesalahan/Peluang salah jenis I/taraf nyata → α

(3). Deskripsikan data contoh yang diperoleh (hitung rataan, ragam, standard error dll)

(4). Hitung statistik ujinya

Statistik uji yang digunakan sangat tergantung pada sebaran statistik dari penduga parameter yang diuji

CONTOH

H_o: $\mu = \mu_o$ maka maka statistik ujinya bisa t-student atau normal baku (z)

$$t_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

atau

$$z_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

(5) Tentukan batas kritis atau daerah penolakan Ho

Daerah penolakan Ho sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H1)

CONTOH

$H_1: \mu < \mu o$ → Tolak H_0 jika th < -t(α; db)(tabel)

$H_1: \mu > \mu o$ → Tolak H_0 jika th > t(α; db)(tabel)

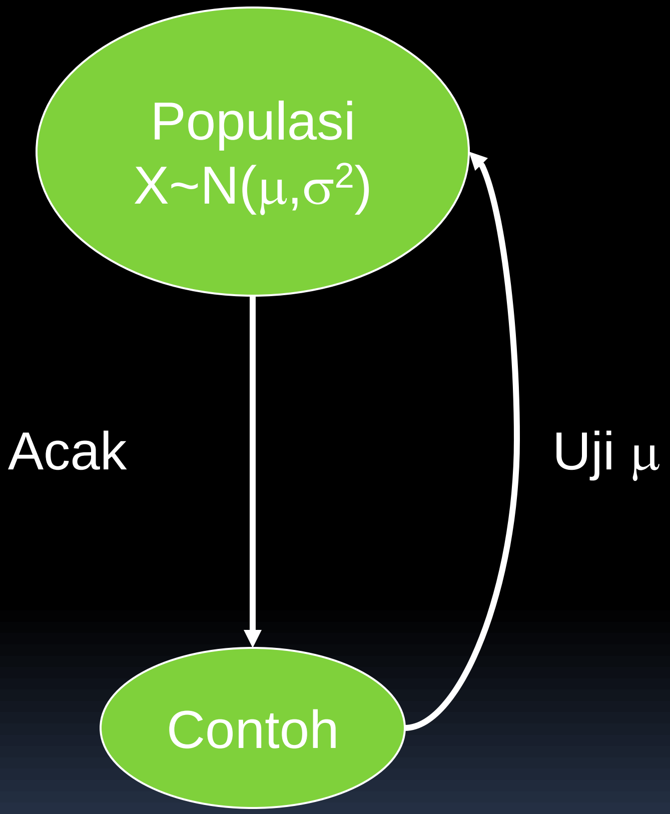
$H_1: \mu \neq \mu o$ → Tolak H_0 jika |th | > t(α/2; db)(tabel)

(6).Tarik keputusan dan kesimpulan

Pengujian Nilai Tengah Populasi

Kasus Satu Contoh

- Suatu contoh acak diambil dari satu populasi Normal berukuran n
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ sebesar nilai tertentu, katakanlah μ_o



- Hipotesis yang dapat diuji:

  Hipotesis satu arah:

  - $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$

  Hipotesis dua arah:

  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Statistik uji:
  - Jika ragam populasi (σ^2) diketahui :

$$z_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

  - Jika ragam populasi (σ^2) tidak diketahui :

$$t_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

- Daerah kritis pada taraf nyata (α)
  - Besarnya taraf nyata sangat tergantung dari bidang yang sedang dikaji
  - Daerah penolakan H_o sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H_1) dan statistik uji

H1: $\mu < \mu o$ → Tolak Ho jika zh $< -z_{\alpha}$ (tabel)

H1: $\mu > \mu o$ → Tolak Ho jika zh $> z_{\alpha}$ (tabel)

H1: $\mu \neq \mu o$ → Tolak Ho jika $|zh| > z_{\alpha/2}$(tabel)

H1: $\mu < \mu o$ → Tolak Ho jika th $< -t_{(\alpha;\, db=n-1)}$(tabel)

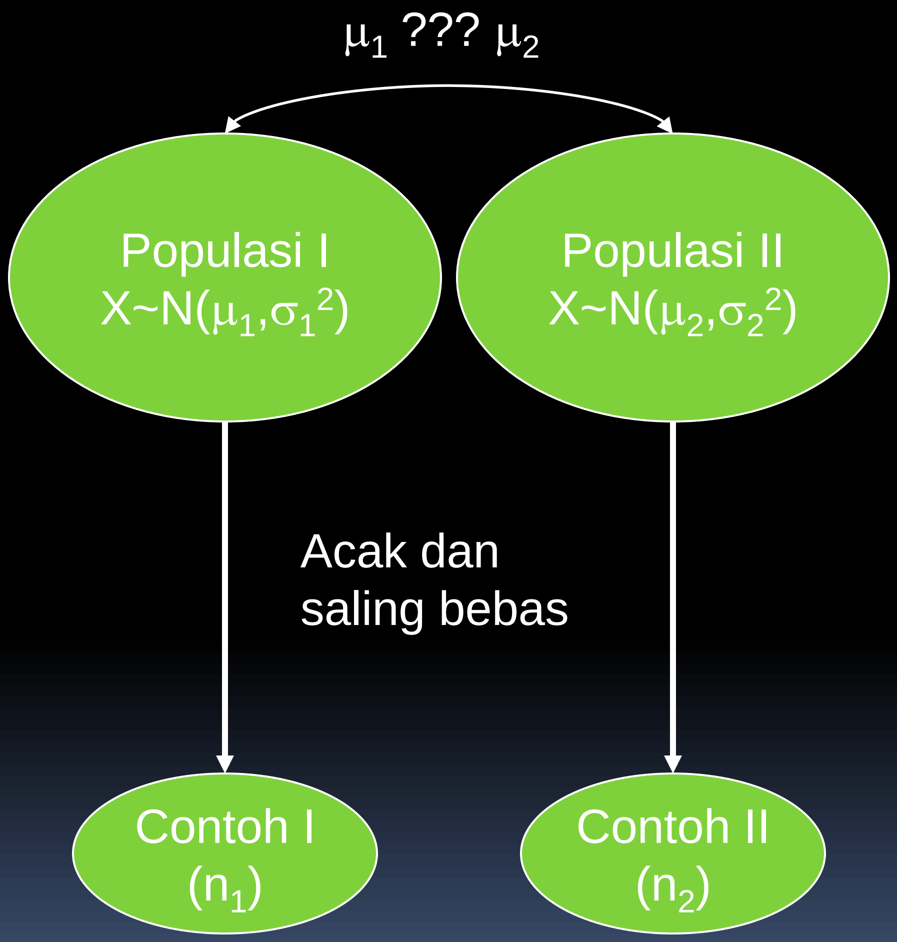
H1: $\mu > \mu o$ → Tolak Ho jika th $> t_{(\alpha;\, db=n-1)}$(tabel)

H1: $\mu \neq \mu o$ → Tolak Ho jika $|th| > t_{(\alpha/2;\, db=n-1)}$(tabel)

Perbandingan Nilai Tengah Dua Populasi

Kasus Dua Contoh Saling Bebas

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran tertentu (bisa sama, bisa juga tidak sama)
- Pengambilan kedua contoh saling bebas
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



- Hipotesis
  - Hipotesis satu arah:

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$
  - Hipotesis dua arah:

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

- Statistik uji:
  - Jika ragam kedua populasi diketahui katakan σ_1^2 dan σ_2^2 :

$$z_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

  - Jika ragam kedua populasi tidak diketahui:

$$t_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$db = \begin{cases} n1 + n2 - 2; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ db_{efektif}; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \begin{cases} s_g \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

- db efektif

$$db = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

- Daerah kritis pada taraf nyata (α)
  - Pada prinsipnya sama dengan kasus satu contoh, dimana daerah penolakan H_o sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H_1) dan statistik uji

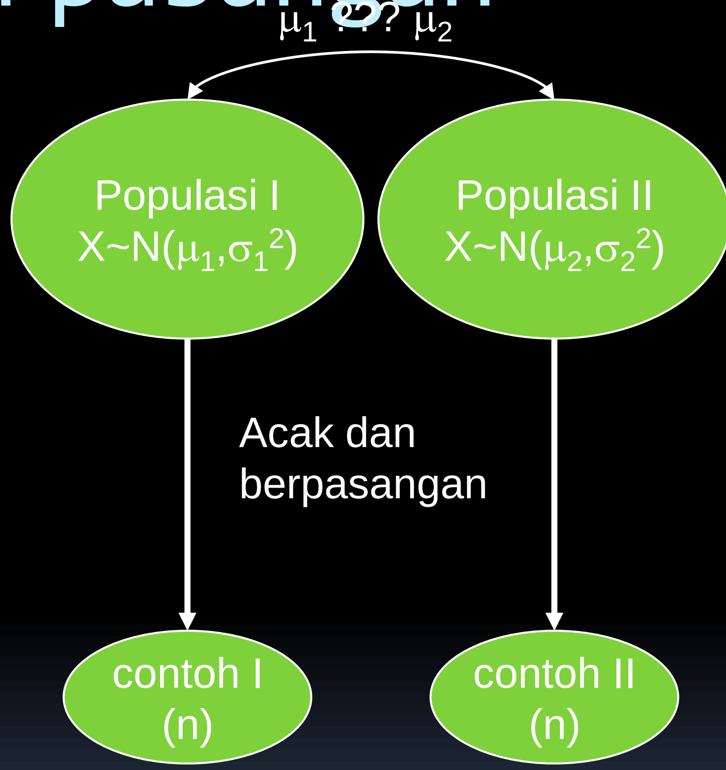
    H1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $z_h < -z_{\alpha}$ (tabel)
    H1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $z_h > z_{\alpha;}$(tabel)
    H1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $|z_h| > z_{\alpha/2}$(tabel)

    H1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $t_h < -t_{(\alpha;\, db)}$(tabel)
    H1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $t_h > t_{(\alpha;\, db)}$(tabel)
    H1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o \rightarrow$ Tolak Ho jika $|t_h| > t_{(\alpha/2;\, db)}$(tabel)

Perbandingan Nilai Tengah Dua Populasi Berpasangan

Kasus Dua contoh Saling Berpasangan

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran n (wajib sama)
- Pengambilan kedua contoh berpasangan, ada pengkait antar kedua contoh (bisa waktu, objek, tempat, dll)
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



Pasangan 1

Pasangan …

Pasangan n

- Apabila D=X1-X2, maka hipotesis statistika:
  - Hipotesis satu arah:

    $H_0: \mu_D \geq \delta_0$ vs $H_1: \mu_D < \delta_0$

    $H_0: \mu_D \leq \delta_0$ vs $H_1: \mu_D > \delta_0$
  - Hipotesis dua arah:

    $H_0: \mu_D = \delta_0$ vs $H_1: \mu_D \neq \delta_0$

- Statistik uji:

$$t_h = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

Dimana $\bar{d}$ adalah rata-rata simpangan antar pengamatan pada contoh pertama dengan contoh kedua

Pasangan	1	2	3	…	n
contoh 1 (X_1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}
contoh 2 (X_2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}
$D = (X_1 - X_2)$	d_1	d_2	d_3		d_n

- Daerah Kritis: (lihat kasus satu contoh)

Pengujian Ragam Satu populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - Satu Arah:

    $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\quad$ $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

    $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\quad$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
  - Dua Arah:

    $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$

    $H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- Statistik uji :

$$\chi^2_{hit} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(db=n-1)}$$

- Kriteria penolakan H_0

1. H_0: $\sigma^2 \leq \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$

2. H_0: $\sigma^2 \geq \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$

3. H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha/2}$ atau $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha/2}$

   H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$

Pengujian Ragam Dua populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - Satu Arah:

    $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\quad$ $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

    $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\quad$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$
  - Dua Arah:

    $H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_0^2$

    $H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- Statistik uji : $f_{hit} = \dfrac{\max(s_1^2, s_2^2)}{\min(s_1^2, s_2^2)} \sim f_{(db_1 = n_1 - 1; db_2 = n_2 - 1)}$

- Kriteria penolakan H_0

1. H_0: $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} > f_{\alpha(db1;db2)}$
   H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$
2. H_0: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha(db1;db2)}$
   H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
3. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha/2(db1;db2)}$ atau $f_{hit} > f_{\alpha/2(db1;db2)}$
   H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$