Kekonvergenan dalam Sebaran dan Peluang

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n merupakan peubah acak yang menyebar bebas dan identik, baik diskret maupun kontinu. Di dalam aplikasi, peubah acak ini merepresentasikan n observasi bebas dari suatu peubah acak X. Namun pada kenyataannya, sebaran X ini tidak diketahui sehingga diperlukan adanya pendekatan atau aproksimasi untuk sebaran tersebut.

Definisi 1

Misalkan Y_1, Y_2, ..., Y_n merupakan peubah acak yang masing-masing memilki fungsi sebaran (*distribution function*) F_1, F_2, ..., F_n. Peubah acak tersebut bisa diskrit maupun kontinu, serta bersifat bebas dan identik. Misalkan juga bahwa Y adalah peubah acak dengan fungsi sebaran G. Kita katakan bahwa barisan (*sequence*) peubah acak $\{Y_n\}$, $n \geq 1$, konvergen dalam sebaran (*converges in distribution*) ke peubah acak Y untuk $n \to \infty$ dan ditulis $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, jika $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)$ untuk semua titik x yang kontinu pada G.

Kasus 1

Misalkan untuk $n \geq 1$, fungsi sebaran F_n dan G adalah sebagai berikut:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}, & 1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{n}, \\ 1, & x \geq 1 + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{dan}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi tersebut dapat diketahui bahwa G tidak kontinu pada $x = 1$. Dapat dibuktikan juga bahwa untuk $x \neq 1$, $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)$.

Definisi 2

Barisan (*sequence*) peubah acak $\{Y_n\}$, $n \geq 1$, konvergen dalam peluang (*converges in probability*) ke peubah acak Y untuk $n \to \infty$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, yang ekuivalen dengan $P(|Y_n - Y| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Notasi yang digunakan adalah : $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y$.

Teorema 1

Misalkan $\{Y_n\}$, $n \geq 1$, adalah barisan (*sequence*) peubah acak, dan misalkan Y adalah peubah acak, maka:

1. $(\, Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y \,) \;\rightarrow\; (\, Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y \,)$
2. $(\, Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c \,) \;\leftrightarrow\; (\, Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c \,)$, c adalah konstanta

Pembuktian Teorema 1 disediakan sebagai latihan.

Teorema 2

Hukum Bilangan Besar Lemah (*Weak Law of Large Numbers*, WLLN). Misalkan X_1, X_2, ... adalah peubah acak yang menyebar bebas dan identik dengan nilai harapan μ, dan misalkan juga $\hat{X}_n$ adalah nilai tengah contoh (*sample mean*) dari X_1, X_2, ..., X_n, maka $\hat{X}_n$ konvergen dalam sebaran ke μ, yaitu $\hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mu$.

Pembuktian Teorema 2 ini dapat menggunakan pertidaksamaan Tchebichev, yaitu:

$$P(|Y - E(Y)| \geq c) \leq \frac{\left(Y - E(Y)\right)^2}{c^2} = \frac{V(Y)}{c^2}$$

Pada Teorema 2 di atas, $E(\hat{X}_n) = \mu$ dan $V(\hat{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, sehingga berdasarkan pertidaksamaan Tchebichev:

$$P\left(\left|\hat{X}_n - E\left(\hat{X}_n\right)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\left(\hat{X}_n - E\left(\hat{X}_n\right)\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{V(\hat{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|\hat{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\left(\hat{X}_n - \mu\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|\hat{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sehingga $\hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$, yang berimplikasi bahwa $\hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mu$ (sesuai Teorema 1).

<u>Teorema 3</u>

Teorema Limit Pusat (*Central Limit Theorem*, CLT). Misalkan X_1, X_2, ... adalah peubah acak yang menyebar bebas dan identik dengan nilai harapan μ dan ragam positif σ^2, dan misalkan juga $\hat{X}_n$ adalah nilai tengah contoh (*sample mean*) dari X_1, X_2, ..., X_n. Maka:

$$\frac{\hat{X}_n - E\left(\hat{X}_n\right)}{\sqrt{V(\hat{X}_n)}} = \frac{\hat{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\hat{X}_n - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1)$$

Latihan

1. Exercises 1.1, Roussas : hlm. 207
2. Exercises 1.4, Roussas : hlm. 207
3. Exercises 2.1, Roussas : hlm. 217
4. Exercises 2.4, Roussas : hlm. 218
5. Buktikan Corollary (i, ii, iii), Roussas : hlm. 223