Transformasi : Sebaran *t-Student* dan Sebaran *F*

Metode transformasi yang telah dibahas sebelumnya dapat digunakan untuk mendapatkan fkp baru dari p.a. hasil transformasi. Dua sebaran dalam statistika yang merupakan hasil dari metode transformasi tersebut adalah sebaran *t-Student* dan sebaran *F*.

Teorema 1

Misalkan X dan Y adalah dua p.a. yang saling bebas dengan fkp sebagai berikut: $X \sim N(0,\ 1)$ dan $Y \sim \chi^2_{(r)}$. Jika kemudian didefinisikan p.a. lainnya $T = X/\sqrt{Y/r}$ maka p.a. T memiliki sebaran *t-Student* dengan derajat bebas r.

Karena $X \sim N(0,\ 1)$ dan $Y \sim \chi^2_{(r)}$ maka dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{(1/2)r}} y^{(r/2)-1} e^{-y/2}, \qquad 0 < y < \infty$$

kemudian didefinisikan p.a. lainnya $T = X/\sqrt{Y/r}$

Perlu didefinisikan satu peubah acak lain agar transformasi terjadi dari ruang berdimensi dua ke ruang berdimensi dua. Misalkan $U = Y$, sehingga diperoleh sepasang transformasi yaitu $t = x/\sqrt{y/r}$ dan $u = y$. Trasformasi ini bersifat satu-satu untuk seluruh daerah fungsi.

$$t = x/\sqrt{y/r} \qquad \text{dan} \qquad u = y$$

Melalui metode substitusi ataupun eliminasi dari persamaan di atas, akan diperoleh persamaan berikut:

$$x = t\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} \qquad \text{dan} \qquad y = u$$

$$\partial x/\partial t = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}; \qquad \partial x/\partial u = t\frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{r}};$$

$$\partial y/\partial t = 0; \qquad \partial y/\partial u = 1;$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} & \dfrac{t}{2\sqrt{u}\sqrt{r}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$$

Selanjutnya menentukan batas nilai bagi t dan u yaitu :

karena $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$, dan $0 < r < \infty$ maka dapat dinyatakan bahwa $0 < \sqrt{y/r} < \infty$, sehingga

$$-\infty < (t = x/\sqrt{y/r}) < \infty \quad \Rightarrow \quad -\infty < t < \infty$$

$$0 < (u = y) < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 < u < \infty$$

Berdasarkan hasil di atas, maka fungsi kepekatan peluang bersama bagi p.a. T dan U adalah

$$\begin{aligned} f_{T,U}(t,u) &= f_{X,Y}(x,y).|J| = f_X(x).f_Y(y).|J| \\ &= f_X\left(t\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}\right).f_Y(u).\left|\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}\right| \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2u/2r}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}u^{(r/2)-1}e^{-u/2}\right)\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{r/2}}u^{(1/2)(r+1)-1}\exp\left[-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)\right] \end{aligned}$$

dimana

$$-\infty < t < \infty \quad \text{dan} \quad 0 < u < \infty$$

Sebaran marjinal bagi p.a. T adalah

$$f_T(t) \quad = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{r/2}} u^{(1/2)(r+1)-1} \exp\left[-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right) \right] \right\} du$$

misalkan

$$\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right) = z$$

sehingga

$$u = 2z\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-1} = \frac{2z}{1+(t^2/r)}, \qquad du = \frac{2}{1+(t^2/r)} dz$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{r/2}} \left(\frac{2z}{1+(t^2/r)} \right)^{(1/2)(r+1)-1} e^{-z} \left(\frac{2}{1+(t^2/r)} \right) \right\} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{r/2}} \frac{2^{(1/2)(r+1)}}{[1+(t^2/r)]^{(1/2)(r+1)}} \int_0^\infty z^{(1/2)(r+1)-1} e^{-z} dz \end{aligned}$$

karena $\dfrac{1}{\Gamma[(r+1)/2]} z^{(1/2)(r+1)-1} e^{-z}$ untuk $z > 0$ merupakan fkp Gamma dengan $\alpha = (r+1)/2$ dan $\beta = 1$, maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \frac{1}{[1+(t^2/r)]^{(1/2)(r+1)}} \Gamma[(r+1)/2] \\ &= \left(\frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \right) \left(\frac{1}{[1+(t^2/r)]^{(1/2)(r+1)}} \right), \qquad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

$f_T(t)$ tersebut dikenal sebagai fungsi kepekatan peluang *t-Student* dengan derajat bebas r.

Teorema 2

Misalkan X dan Y adalah dua p.a. yang saling bebas dengan fkp sebagai berikut: $X \sim \chi^2_{(r_1)}$ dan $Y \sim \chi^2_{(r_2)}$. Jika kemudian didefinisikan p.a. lainnya $F = \dfrac{X/r_1}{Y/r_2}$ maka p.a. F memiliki sebaran F dengan derajat bebas r_1 dan r_2 yaitu:

$$f_F(f) = \left(\frac{\Gamma[(r_1+r_2)/2](r_1/r_2)^{r_1/2}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)}\right)\left(\frac{f^{(r_1/2)-1}}{[1+(r_1/r_2)f](1/2)(r_1+r_2)}\right),$$

dimana $0 < f < \infty$

Pembuktian teorema ini disediakan sebagai latihan (Lihat : **Roussas**, sub-bab 6.2, hlm. 179-181)

Latihan

1. Jika diketahui bahwa peubah acak X memiliki sebaran *t-Student* dengan derajat bebas r, buktikan bahwa:

$$E(X) = 0, \qquad r > 1; \quad \text{dan} \quad V(X) = \frac{r}{r-2}, \quad r > 2$$

2. Jika diketahui bahwa peubah acak Y memiliki sebaran F dengan derajat bebas r_1 dan r_2, buktikan bahwa:

$$E(Y) = \frac{r_2}{r_2-2}, \qquad r_2 > 2;$$

$$V(Y) = 2\left(\frac{r_2}{r_2-2}\right)^2 \frac{(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-4)}, \qquad r_2 > 4$$