Sebaran Statistik Tataan (*Order Statistic*)

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n dinotasikan sebagai contoh acak dari suatu sebaran kontinu yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$ untuk $a < x < b$. Misalkan Y_1 adalah yang terkecil dari X_i, kemudian Y_2 adalah urutan terkecil kedua dari X_i, ..., dan Y_n adalah yang terbesar dari X_i. Sehingga $Y_1 < Y_2 < ... < Y_n$ merepresentasikan X_1, X_2, ..., X_n apabila ditata dari kecil ke besar (*ascending*). Selanjutnya Y_i, i = 1, 2, ..., n, disebut sebagai statistik tataan (*order statistic*) ke-i dari contoh acak X_1, X_2, ..., X_n.

Teorema 1

Misalkan Y_i, i = 1, 2, ..., n, merupakan statistik tataan ke-i dari contoh acak bebas dan identik X_1, X_2, ..., X_n. Fungsi kepekatan peluang bersama dari Y_1, Y_2, ..., Y_n adalah

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = (n!)\, f(y_1)\, f(y_2) ... f(y_n),$$
$$a < y_1 < y_2 < ... < y_n < b$$

Teorema 2

Misalkan Y_i, i = 1, 2, ..., n, merupakan statistik tataan ke-i dari contoh acak bebas dan identik X_1, X_2, ..., X_n. Fungsi kepekatan peluang marginal salah satu statistik tataan, misalnya Y_k, adalah

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1}[1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k),$$
$$a < y_k < b$$

Teorema 3

Misalkan Y_i, i = 1, 2, ..., n, merupakan statistik tataan ke-i dari contoh acak bebas dan identik X_1, X_2, ..., X_n. Fungsi kepekatan peluang bersama dua statistik tataan, misalnya $Y_i < Y_j$, adalah

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \times [F(y_i)]^{i-1}[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}[1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_i) f(y_j), \quad a < y_i < y_j < b$$

Pembuktian secara lengkap tiga teorema di atas dapat dilihat di **Hogg & Craig**, dan **Roussas** (disediakan sebagai latihan).

Kasus 1

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n adalah peubah acak yang menyebar acak dan identik sebagai $U(\alpha, \beta)$. Fungsi kepekatan peluang bersama statistik tataan Y_1, Y_2, ..., Y_n adalah:

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = \frac{n!}{(\beta - \alpha)^n}, \qquad \alpha < y_1 < y_2 < ... < y_n < \beta$$

Kasus 2

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n adalah peubah acak yang menyebar acak dan identik sebagai $U(0, 1)$. Jika didefinisikan suatu peubah acak Z = maksimum(X_1, X_2, ..., X_n), tentukan fkp bagi Z.

Peubah acak Z merupakan statistik tataan, yaitu $Z = Y_n$, sehingga berdasarkan Teorema 2 dapat dinyatakan bahwa:

$$g_n(y_n) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}[F(y_n)]^{n-1}[1 - F(y_n)]^{n-n} f(y_n)$$
$$= n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n), \quad 0 < y_n < 1$$

Karena $f(x)=1$, $0 < x < 1$, maka

$$F(x)=\int_0^x 1dx = x$$

$$g_n(y_n)=n[F(y_n)]^{n-1}f(y_n)=n[y_n]^{n-1}.1=n(y_n)^{n-1},$$
$$0<y_n<1$$

Jadi fkp peubah acak Z = maksimum(X_1, X_2, ..., X_n) adalah:

$$f(z)=n(z)^{n-1}, \qquad 0<z<1$$

Kasus 3

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n adalah peubah acak yang menyebar acak dan identik sebagai Eksponensial Negatif dengan parameter sebaran λ. Jika kemudian didefinisikan suatu peubah acak lain yaitu V = minimum(X_1, X_2, ..., X_n), tunjukkan bahwa fkp peubah acak V adalah Eksponensial Negatif dengan parameter sebaran $n\lambda$.

Peubah acak V merupakan statistik tataan, yaitu $V = Y_1$, sehingga berdasarkan Teorema 2 dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}[F(y_1)]^{1-1}[1-F(y_1)]^{n-1}f(y_1) \\ &= n[1-F(y_1)]^{n-1}f(y_1), \end{aligned}$$
$$y_1>0$$

Karena $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, maka

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx = 1-e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= n[1-F(y_1)]^{n-1}f(y_1) \\ &= n[1-(1-e^{-\lambda y_1})]^{n-1}(\lambda e^{-\lambda y_1}) \\ &= (n\lambda)e^{-(n\lambda)y_1}, \end{aligned}$$
$$y_1>0$$

Jadi fkp peubah acak V = minimum(X_1, X_2, ..., X_n) adalah:

$$f(v) = (n\lambda)e^{-(n\lambda)v}, \qquad v > 0$$

merupakan fkp Eksponensial Negatif dengan parameter sebaran $n\lambda$.

Kasus 4

Misalkan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ merupakan statistik tataan dari contoh acak berukuran 4 dari sebaran yang memiliki fkp:

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

Tentukan peluang $P(Y_3 > ½)$.

Karena $F(x) = x^2$ untuk $0 < x < 1$, maka

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{(2!)(1!)}(y_3^2)^2(1 - y_3^2)^1(2y_3),$$

$$0 < y_3 < 1$$

$$P(Y_3 > ½) = \int_{1/2}^{1} g_3(y_3)dy_3 = \frac{243}{256}$$

Kasus 5

Misalkan $Y_1 < Y_2 < Y_3$ merupakan statistik tataan dari contoh acak berukuran 3 dari sebaran yang memiliki fkp:

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

Tentukan fkp bagi jangkauan (*range*), yaitu

$$R = Y_{\text{maks}} - Y_{\text{min}} = Y_3 - Y_1$$

Karena $f(x) = 1$, $0 < x < 1$, maka $F(x) = x$ untuk $0 < x < 1$.

Sebaran bersama Y_1 dan Y_3 adalah:

$$g_{13}(y_1, y_2) = 6(y_3 - y_1), \qquad 0 < y_1 < y_3 < 1$$

Agar trasformasi dari dimensi 2 ke dimensi 2, maka perlu didefinisikan peubah acak lain, misalnya $S = Y_3$, sehingga ada 2 transformasi yaitu:

$$R = Y_3 - Y_1 \quad \text{dan} \quad S = Y_3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y_1 = S - R \quad \text{dan} \quad Y_3 = S$$

$$J = Jacobian = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Sebaran bersama R dan S adalah

$$h(r, s) = 6(s - (s - r)).|-1| = 6r, \qquad 0 < r < s < 1$$

Sehingga sebaran untuk jangkauan, $R = Y_3 - Y_1$, adalah

$$h(r) = \int_r^1 6r\,ds = 6r(1 - r), \qquad 0 < r < 1$$

Kasus 6

Misalkan X_1, X_2, X_3 merupakan contoh acak dari sebaran kontinu yang memiliki fkp:

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

a. Tentukan fkp bagi X_{min}.
b. Tentukan fkp bagi median
c. Tentukan peluang bahwa X_{min} lebih besar dari median

Kasus 7

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n merupakan contoh acak dari sebaran Uniform(0, 1). Tunjukkan bahwa fkp bagi jangkauan (*range*), $R = X_{\text{maks}} - X_{\text{min}}$, adalah

$$f(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r), \qquad 0 < r < 1$$