Transformasi Dua atau Lebih Peubah Acak

Misalkan diketahui fkp bersama bagi p.a. X_1 dan X_2 adalah $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. lainnya yaitu Y_1 dan Y_2, dimana $Y_1 = h_1(x_1, x_2)$ dan $Y_2 = h_2(x_1, x_2)$, maka ingin diketahui fkp bersama bagi p.a. Y_1 dan Y_2 yaitu $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$.

Teorema

Misalkan diketahui fkp bersama bagi p.a. X_1 dan X_2 adalah $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ yang positif dan kontinu pada gugus $S \subseteq R^2$, dan didefinisikan fungsi h_1, h_2 : $S \rightarrow R$, dan T merupakan bayangan S sebagai tranformasi satu-satu (*one-to-one*) dari (h_1, h_2). Oleh karena itu, jika $y_1 = h_1(x_1, x_2)$ dan $y_2 = h_2(x_1, x_2)$ maka inversnya $x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2)$ dan $x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2)$, dengan $(y_1, y_2) \in T$. Anggap bahwa untuk $(y_1, y_2) \in T$, dx_1/dy_1 dan dx_2/dy_2 ada, kontinu, dan tidak sama dengan 0. Maka fkp bersama bagi p.a. Y_1 dan Y_2 adalah:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}\{h_1^{-1}(y_1, y_2), h_2^{-1}(y_1, y_2)\}.|J|, \qquad (y_1, y_2) \in T$$

dimana,

$$J = Jacobi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Kasus 1

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai sebaran $U(0, 1)$, sedangkan X_1 dan X_2 merupakan contoh acak bebas dari sebaran ini. Apabila didefinisikan $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$, tentukan:

a. Fungsi kepekatan bersama bagi p.a. Y_1 dan Y_2 yaitu $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$.

b. Fungsi kepekatan marginal bagi p.a. Y_1 dan Y_2 yaitu $f_{Y_1}(y_1)$ dan $f_{Y_2}(y_2)$.

Karena $X \sim U(0, 1)$, sedangkan X_1 dan X_2 merupakan contoh acak bebas dan identik dari sebaran ini maka fkp bersama bagi X_1 dan X_2 adalah

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1; \qquad 0 < x_1 < 1 \quad \text{dan} \quad 0 < x_2 < 1$$

kemudian didefinisikan bahwa

$$y_1 = h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$y_2 = h_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

Melalui metode substitusi ataupun eliminasi dari persamaan di atas, akan diperoleh persamaan berikut:

$$x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 + y_2)/2$$
$$x_2 = h_2^{-1}(x_1, x_2) = (y_1 - y_2)/2$$

$$\partial x_1/\partial y_1 = ½; \qquad \partial x_1/\partial y_2 = ½;$$
$$\partial x_2/\partial y_1 = ½; \qquad \partial x_2/\partial y_2 = -½;$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Sehingga kepekatan bersama bagi p.a. Y_1 dan Y_2 adalah

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\{h_1^{-1}(y_1,y_2), h_2^{-1}(y_1,y_2)\}.|J|$$
$$= f_{X_1,X_2}\{(y_1+y_2)/2, (y_1-y_2)/2\}.\left|-\frac{1}{2}\right|$$
$$= (1).\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}; \qquad (y_1,y_2)\in T$$

Persoalan berikutnya adalah menentukan batas nilai bagi y_1 dan y_2 yaitu T,

<u>Untuk $0 < x_1 < 1$</u>

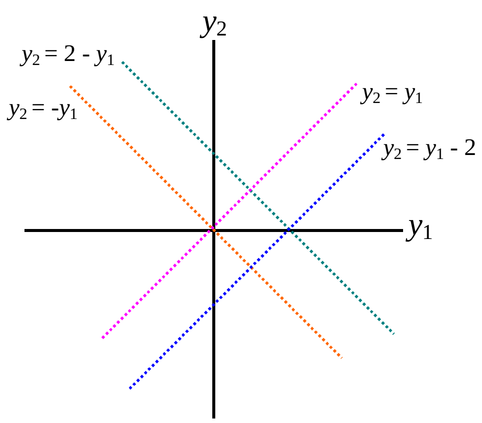
$$0 < x_1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (y_1 + y_2)/2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y_1 + y_2 < 2$$
$$0 < y_1 + y_2 \quad \text{dan} \quad y_1 + y_2 < 2$$
$$y_2 > -y_1 \quad \text{dan} \quad y_2 < 2 - y_1$$

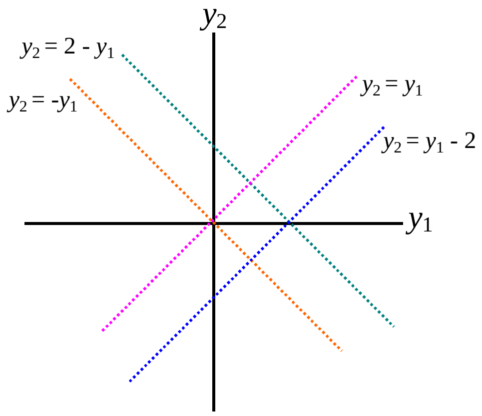
<u>Untuk $0 < x_2 < 1$</u>

$$0 < x_2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (y_1 - y_2)/2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y_1 - y_2 < 2$$
$$0 < y_1 - y_2 \quad \text{dan} \quad y_1 - y_2 < 2$$
$$y_2 < y_1 \quad \text{dan} \quad y_2 > y_1 - 2$$

Sehingga batas nilai bagi y_1 dan y_2 adalah

$y_2 > -y_1$; $y_2 < 2 - y_1$; $y_2 < y_1$; dan $y_2 > y_1 - 2$





Sebaran marginal bagi y_1 adalah

- Untuk $0 < y_1 \le 1$

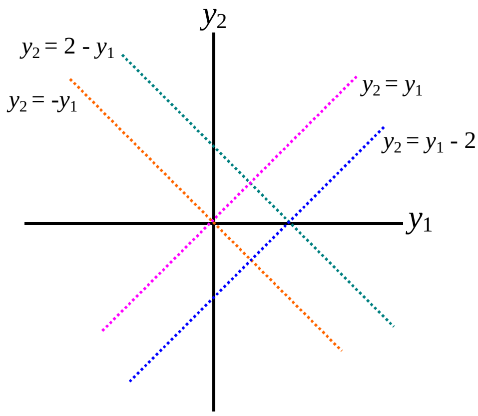
$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-y_1}^{y_1} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2 = \int_{-y_1}^{y_1} \left(\frac{1}{2}\right)dy_2 = y_1$$

- Untuk $1 < y_1 < 2$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{y_1-2}^{2-y_1} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2 = \int_{y_1-2}^{2-y_1} \left(\frac{1}{2}\right)dy_2 = 2 - y_1$$

Sehingga

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} y_1 & ; \quad 0 < y_1 \le 1 \\ 2 - y_1 & ; \quad 1 < y_1 < 2 \\ 0 & ; \quad y_1 \text{ lainnya} \end{cases}$$



Sebaran marginal bagi y_2 adalah

- Untuk $-1 < y_2 \leq 0$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-y_2}^{y_2+2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \int_{-y_2}^{y_2+2} \left(\frac{1}{2}\right)dy_1 = y_2 + 1$$

- Untuk $0 < y_1 < 1$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{y_2}^{2-y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \int_{y_2}^{2-y_2} \left(\frac{1}{2}\right)dy_1 = 1 - y_2$$

Sehingga

$$f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} y_2 + 1 & ; \quad -1 < y_2 \leq 0 \\ 1 - y_2 & ; \quad 0 < y_2 < 1 \\ 0 & ; \quad y_2 \text{ lainnya} \end{cases}$$

Kasus 2

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai fkp sebagai berikut

$$f_X(x) = e^{-x}, \qquad x \geq 0$$

sedangkan X_1 dan X_2 merupakan contoh acak bebas dan identik dari fkp ini. Ingin ditentukan fkp p.a. $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

Karena X_1 dan X_2 merupakan contoh acak bebas dan identik dari sebaran ini maka fkp bersama bagi X_1 dan X_2 adalah

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-x_1}e^{-x_2} = e^{-(x_1+x_2)}; \qquad x_1 \geq 0 \quad \text{dan} \quad x_2 \geq 0$$

Perlu didefinisikan satu peubah acak lain agar transformasi terjadi dari ruang berdimensi dua ke ruang berdimensi dua. Misalkan $Z = X_1 + X_2$, sehingga diperoleh sepasang transformasi yaitu $y = x_1/(x_1 + x_2)$ dan $z = x_1 + x_2$. Trasformasi ini bersifat satu-satu untuk seluruh daerah fungsi.

$$y = x_1/(x_1 + x_2) \quad \text{dan} \quad z = x_1 + x_2$$

Melalui metode substitusi ataupun eliminasi dari persamaan di atas, akan diperoleh persamaan berikut:

$$x_1 = yz$$
$$x_2 = (1 - y)z$$

$$\partial x_1/\partial y = z; \qquad \partial x_1/\partial z = y;$$
$$\partial x_2/\partial y = -z; \qquad \partial x_2/\partial z = 1 - y;$$

$$J = \begin{vmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{vmatrix} = z$$

Sehingga kepekatan bersama bagi p.a. Y dan Z adalah

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y,z) &= f_{X_1,X_2}(x_1,x_2).|J| \\ &= e^{-(yz+(1-y)z)}.|z| \\ &= ze^{-z}, \qquad (y,z)\in T \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan batas nilai bagi y dan z yaitu T.

Perhatikan, karena $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$, maka

$0 \leq y = x_1/(x_1 + x_2) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 1$

$z = x_1 + x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z \geq 0$

sehingga

$$f_{Y,Z}(y,z) = ze^{-z}, \qquad 0 \leq y \leq 1 \text{ dan } z \geq 0$$

Sebaran marginal bagi p.a. $Y = X_1/(X_1 + X_2)$ adalah

$$\int_0^\infty ze^{-z}dz = 1$$

Dengan demikian, fkp bagi p.a. $Y = X_1/(X_1 + X_2)$ adalah

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Kasus 3

Lihat Example 4, ***Roussas***, Sub-bab 6.2, hlm. 173 - 175

Kasus 4

Misalkan peubah acak X dan Y saling bebas dan mempunyai fkp Eksponensial Negatif dengan $\lambda = 1$, dan didefinisikan $U = (X + Y)/2$ dan $V = (X - Y)/2$.

a. Tentukan fkp bersama $f_{U,V}(u, v)$.
b. Tentukan fkp marginalnya yaitu $f_U(u)$ dan $f_V(v)$.

Lihat ***Roussas***, Bab 6, Exercise 2.3, hlm. 183.

Sebaran Eksponensial Negatif adalah:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \ \lambda > 0$$

Kasus 5

Misalkan peubah acak X dan Y saling bebas dan mempunyai fkp Normal(0, 1), dan didefinisikan $U = X + Y$ dan $V = X - Y$.

a. Tentukan fkp bersama $f_{U,V}(u, v)$.
b. Tentukan fkp marginalnya yaitu $f_U(u)$ dan $f_V(v)$.
c. Tunjukkan bahwa U dan V independen.
d. Hitung peluang $P(U < 0, V > 0)$.

Kasus 6

Misalkan peubah acak X dan Y saling bebas dan mempunyai fkp Normal(0, σ^2). Tunjukkan bahwa peubah acak $U = X^2 + Y^2$ mempunyai fkp Eksponensial Negatif dengan $\lambda=1/(2\sigma^2)$.