Dr. Kusman Sadik
Dept. Statistika IPB, 2012

Transformasi Peubah Acak (Lanjutan)

B. Metode Penggantian Peubah

Metode ini merupakan pengembangan dari metode fungsi sebaran. Misalkan diketahui fkp bagi p.a. X adalah $f_X(x)$. Jika didefinisikan p.a. lainnya yaitu $Y = h(x)$, maka ingin diketahui fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Perhatikan bahwa dalam transformasi p.a. fungsinya, yaitu $h(x)$, harus fungsi satu-satu (*one-to-one*).

$$Y = h(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(h(X) \le y) = P(X \le h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = F_X(h^{-1}(y))$$

selanjutnya tentukan turunan dari $F_Y(y)$ di atas untuk mendapatkan $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X[h^{-1}(y)]}{dy} = \frac{dF_X[h^{-1}(y)]}{d[h^{-1}(y)]}\frac{d[h^{-1}(y)]}{dy}$$

karena $X = h^{-1}(Y)$, maka persamaan di atas menjadi:

$$f_Y(y) = \frac{dF_X[h^{-1}(y)]}{d[h^{-1}(y)]}\frac{d[h^{-1}(y)]}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

atau

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Teorema:

Misalkan X adalah p.a. dengan fkp $f_X(x)$ pada gugus $S \subseteq R$, dan didefinisikan fungsi $h : S \rightarrow T$ sebagai tranformasi satu-satu (*one-to-one*), sehingga inversnya $x = h^{-1}(y)$, $y \in T$. Anggap bahwa untuk $y \in T$, turunan $(dh^{-1}(y))/dy$ ada, kontinu dan tidak sama dengan 0. Maka fungsi kepekatan peluang bagi p.a. yang didefinisikan $Y = h(X)$ adalah:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|, \qquad y \in T$$

Catatan : $\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ disebut sebagai Jacobi atau disingkat J.

Kasus 1

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai fkp sebagai berikut:

$$f_X(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = 8X^3$, ingin diketahui fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Perhatikan bahwa dalam transformasi p.a. fungsinya harus fungsi satu-satu (*one-to-one*). Pada transformasi di atas, $Y = X^3$, merupakan fungsi satu-satu.

$$Y = h(X) = 8X^3 \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = \left(\frac{Y}{8}\right)^{1/3} = \frac{Y^{1/3}}{2}$$

dan karena $0 < x < 1$ maka $0 < y < 8$.

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y^{1/3}}{2}\right)\right| = \frac{y^{-2/3}}{6}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = 2(h^{-1}(y))\left(\frac{y^{-2/3}}{6}\right)$$

$$f_Y(y) = 2\left(\frac{y^{1/3}}{2}\right)\left(\frac{y^{-2/3}}{6}\right) = \frac{1}{6y^{1/3}}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{6y^{1/3}}, \qquad 0 < y < 8$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp !

Kasus 2

Misalkan p.a. kontinu $X \sim U(\alpha, \beta)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. $Y = e^X$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Karena $X \sim U(\alpha, \beta)$ maka $\alpha < x < \beta$ dan $e^\alpha < y < e^\beta$

$$Y = h(X) = e^X \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = ln(Y)$$

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{d\ln(y)}{dy}\right| = \frac{1}{y}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{(\beta - \alpha)y}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{(\beta - \alpha)y}, \qquad e^\alpha < y < e^\beta$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp !

Kasus 3

Misalkan p.a. kontinu $X \sim U(0, 1)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. $Y = -2ln(X)$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Karena $X \sim U(0, 1)$ maka $0 < x < 1$ dan $y > 0$

$$Y = h(X) = -2ln(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = e^{-y/2}$$

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{de^{-y/2}}{dy}\right| = \left|-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right| = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = 1.\left(\frac{1}{2}e^{-y/2}\right) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}, \qquad y > 0$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp. Catatan, fkp ini merupakan sebaran χ^2 dengan derajat bebas 2.

Kasus 4

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai fkp sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-2}e^{-1/(2x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = \dfrac{1}{X}$, tunjukkan bahwa fkp bagi Y adalah Normal(0, 1).

Kasus 5

Misalkan p.a. kontinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. $Y = aX - b$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Karena $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka $-\infty < x < \infty$ dan $-\infty < y < \infty$

$$Y = h(X) = aX - b \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = \frac{Y+b}{a}$$

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\frac{Y+b}{a}\right)\right| = \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\left(\frac{y+b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}\exp\left(-\frac{(y-(a\mu - b))^2}{2(a\sigma)^2}\right)$$

Sehingga fkp bagi p.a. $Y = aX - b$ adalah Normal($a\mu - b$, $(a\sigma)^2$)

Kasus 6 (Bukan Fungsi Satu-Satu)

Misalkan p.a. kontinu X menyebar Normal(0, 1) yaitu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = X^2$, ingin diketahui fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Perhatikan bahwa dalam transformasi di atas, $Y = X^2$, bukan fungsi satu-satu (*one-to-one*). Sehingga transformasi tersebut harus dipecah dulu agar menjadi fungsi satu-satu, yaitu:

Untuk - $\infty < x \le 0$

$$Y = h(X) = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = -\sqrt{Y}$$

dan karena - $\infty < x \le 0$ maka $0 \le y < \infty$.

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(-\sqrt{y}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right| = \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{y}\right)^2}.\frac{1}{2}y^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}$$

Untuk $0 < x < \infty$

$$Y = h(X) = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = \sqrt{Y}$$

dan karena $0 < x < \infty$ maka $0 < y < \infty$.

$$J = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}y^{-1/2}\right| = \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{y}\right)^2}.\frac{1}{2}y^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}, \qquad y > 0$$

Perhatikan bahwa fkp p.a. Y tersebut merupakan sebaran Khai-Kuadrat dengan derajat bebas 1 yaitu $\chi^2_{(1)}$.

Jadi jika $X \sim N(0, 1)$ maka $Y = X^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

Catatan : sebaran Khai-Kuadrat dengan derajat bebas r dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} y^{(r/2)-1} e^{-y/2}, \qquad y > 0$$

untuk $r = 1$ maka $\Gamma(r/2) = \sqrt{\pi}$, sehingga

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2}} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, \qquad y > 0$$

<u>Kasus 7 (Peubah Acak Diskret)</u>

Untuk transformasi peubah acak diskret dilakukan seperti pada peubah acak kontinu di atas, hanya saja untuk peubah acak diskret <u>Jacobi selalu sama dengan satu</u> ($J = 1$), yaitu

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)), \qquad y \in T$$

Misalkan p.a. diskret X mempunyai sebaran Poisson(μ), yaitu:

$$f_X(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = 5X$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

$$Y = h(X) = 5X \iff X = h^{-1}(Y) = Y/5$$

karena X merupakan p.a. diskret maka Jacobian = 1, sehingga

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) = f_X(y/5) = \frac{\mu^{y/5} e^{-\mu}}{(y/5)!}, \qquad y = 0, 5, 10, \ldots.$$