Dr. Kusman Sadik
Dept. Statistika IPB, 2012

Transformasi Peubah Acak

Misalkan diketahui fkp bagi p.a. X adalah $f_X(x)$. Jika didefinisikan p.a. lainnya yaitu $Y = h(x)$, maka ingin diketahui fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Ada 2 metode untuk mendapatkan $f_Y(y)$ berdasarkan $f_X(x)$, yaitu :

- Metode fungsi sebaran
- Metode penggantian peubah

A. Metode Fungsi Sebaran

Tentukan terlebih dahulu fungsi sebaran bagi Y yaitu $F_Y(y)$, kemudian tentukan turunan dari $F_Y(y)$ untuk mendapatkan $f_Y(y)$.

Kasus 1

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai fkp sebagai berikut:

$$f_X(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = 8X^3$, ingin diketahui fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Perhatikan bahwa dalam transformasi p.a. fungsinya harus fungsi satu-satu (*one-to-one*). Pada transformasi di atas, $Y = X^3$, merupakan fungsi satu-satu (mengapa?).

$$Y = h(X) = 8X^3 \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = \left(\frac{Y}{8}\right)^{1/3}$$

dan karena $0 < x < 1$ maka $0 < y < 8$.

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x (2x)dx = x^2$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(8X^3 \le y) = P(X \le \left(\frac{Y}{8}\right)^{1/3}) = \left[\left(\frac{Y}{8}\right)^{1/3}\right]^2$$

$$= \left(\frac{Y^{1/3}}{2}\right)^2 = \frac{Y^{2/3}}{4}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(y^{2/3})}{4dy} = \frac{2}{12}\left(y^{-1/3}\right) = \frac{1}{6y^{1/3}}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{6y^{1/3}}, \qquad 0 < y < 8$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp !

Kasus 2

Misalkan p.a. kontinu $X \sim U(\alpha, \beta)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. $Y = e^X$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Perhatikan bahwa dalam transformasi p.a. fungsinya harus fungsi satu-satu (*one-to-one*). Pada transformasi di atas, $Y = e^X$, merupakan fungsi satu-satu (mengapa?).

Karena $X \sim U(\alpha, \beta)$ maka $\alpha < x < \beta$ dan $e^\alpha < y < e^\beta$

$$Y = h(X) = e^X \iff X = h^{-1}(Y) = ln(Y)$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_\alpha^x \left(\frac{1}{\beta - \alpha}\right) dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le ln(y)) = \frac{ln(y) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{ln(y) - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \left(\frac{1}{\beta - \alpha}\right)\frac{1}{y} = \frac{1}{(\beta - \alpha)y}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{(\beta - \alpha)y} , \qquad e^{\alpha} < y < e^{\beta}$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp !

Kasus 3

Misalkan p.a. kontinu $X \sim U(0, 1)$. Jika kemudian didefinisikan p.a. $Y = -2ln(X)$, akan ditentukan fkp bagi Y yaitu $f_Y(y)$.

Karena $X \sim U(0, 1)$ maka $0 < x < 1$ dan $y > 0$

$$Y = h(X) = -2ln(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = h^{-1}(Y) = e^{-y/2}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x dx = x$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2ln(X) \leq y)$$

$$= P(ln(X) \geq -y/2) = P(X \geq e^{-y/2}) = 1 - P(X \leq e^{-y/2})$$

$$= 1 - e^{-y/2}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(1 - e^{-y/2})}{dy} = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

Sehingga fkp bagi p.a. Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2} , \qquad y > 0$$

Coba cek bahwa $f_Y(y)$ tersebut merupakan fkp. Catatan, fkp ini merupakan sebaran χ^2 dengan derajat bebas 2.

Kasus 4

Misalkan p.a. kontinu X mempunyai fkp sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-1/2x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Jika didefinisikan p.a. $Y = \frac{1}{X}$, tunjukkan bahwa fkp bagi Y adalah Normal(0, 1).