Aljabar Matriks

Kombinasi Linear, Spanning Set dan Landasan

Bagus Sartono

bagusco4@yahoo.com

Outline

- Kombinasi Linear
- Spanning Set
- Ruang Kolom dan Ruang Baris
- Kebebasan Linear
- Landasan
- Landasan Ortogonal

Definisi:

Jika $S = \{\underline{S}_1, \underline{S}_2, \ldots, \underline{S}_n\}$ adalah himpunan terhingga n buah vektor, kombinasi linear dari vektor-vektor anggota S didefinisikan sebagai $a_1\underline{S}_1 + a_2\underline{S}_2 + \ldots + a_n\underline{S}_n$

atau $\sum_{i=1}^{n} a_i \underline{S}_i$ dengan $a_i \in R$ i=1,2,....,n

misalkan

$$\underline{s} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kombinasi linear
vektor-vektor ϵ S

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ilustrasi 1:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$$

dan

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Apakah $\underline{a}$ kombinasi linear dari $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$?

$$\underline{a} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{.......?}$$

Jika kita bisa menemukan a_1 dan a_2, maka $\underline{a}$ kombinasi linear dari $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$

ambil

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Karena ada a_1 dan a_2, maka $\underline{a}$ kombinasi linear dari $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$

Ilustrasi 2:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots.?$$

Apakah $\underline{b}$ kombinasi linear dari $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$? Kita periksa apakah SPLnya konsisten atau tidak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r(A)=2$$

$$A \,|\, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A|\underline{y})=3$$

Karena $r(A) \neq r(A|\underline{y})$, maka kita tidak dapat menemukan nilai b_1 dan b_2 yang memenuhi SPL tersebut. Maka **b** bukan kombinasi linear dari $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$

Spanning Set

Perhatikan kembali ruang vektor $R^2 = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$

andaikan $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Bisa ditunjukkan bahwa setiap $\underline{v} \in R^2$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di K

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh Lain (1)

Andaikan $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(a - b/2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Setiap $\underline{v} \in R^2$ bisa dituliskan sebagai kombinasi linear vektor di M

Contoh lain (2)

ambil $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\ ?\ } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\ ?\ } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Tidak ada

Tidak semua $\underline{v} \in R^2$ bisa dituliskan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di W

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\ ?\ } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\ ?\ } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tidak ada

Tidak semua $\underline{v} \in R^2$ bisa dituliskan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di A

Spanning Set (gugus yang merentang)

- Definisi

  Sebuah gugus vektor $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ disebut sebagai gugus yang merentang ruang vektor V, jika dan hanya jika setiap $\mathbf{v} \in V$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S

- Lihat kembali contoh di slide sebelumnya
  - K dan M adalah spanning set bagi R^2
  - A dan W bukan merupakan spanning set bagi R^2

Ruang Kolom dan Ruang Baris

- Kolom-kolom dari sebuah matriks **A** membentuk himpunan vektor. Ruang yang direntang oleh himpunan vektor tersebut dinamakan RUANG KOLOM MATRIKS **A**.

- Baris-baris dari sebuah matriks **A** juga merupakan himpunan vektor. Ruang yang direntang oleh himpunan vektor tersebut dinamakan RUANG BARIS MATRIKS **A**.

Himpunan vektor yang bebas linear (linearly independent set of vectors)

- Sebuah gugus vektor $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ disebut sebagai **gugus vektor yang bebas linear** jika dan hanya jika tidak ada satu pun $\mathbf{s}_i \in S$ yang dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $s_j \in S$ yang lain.

- Atau: Sebuah gugus vektor $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ disebut sebagai **gugus vektor yang bebas linear** jika dan hanya jika SPL

  $a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \ldots + a_n\mathbf{s}_n = \mathbf{0}$

  terjadi jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

- Gugus vektor yang tidak memenuhi kondisi di atas disebut 'tidak bebas linear' atau **'terpaut linear'**

Tentukan apakah himpunan berikut BBL atau TPL

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Landasan (basis) dari Ruang Vektor

- Defininsi

  S adalah himpunan vektor dan V adalah sebuah ruang vektor. S disebut sebagai **landasan (basis)** dari ruang vektor V jika dan hanya jika:

  1. S merentang ruang vektor V
  2. vektor-vektor di S bersifat bebas linear

Landasan dari Ruang Vektor

- Apa untungnya keberadaan sifat bebas linear pada landasan yang tidak dimiliki oleh sebuah spanning set?

- JAWAB: keunikan koefisien kombinasi linearnya.

Masih ingat vektor-vektor ortogonal

?

Himpunan Vektor Ortogonal

- $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ disebut sebagai himpunan vektor-vektor yang **ortogonal** jika dan hanya jika $\mathbf{s}_i'\mathbf{s}_j = 0$ untuk semua $i \neq j$

- $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ disebut sebagai himpunan vektor-vektor yang **ortonormal** jika dan hanya jika $\mathbf{s}_i'\mathbf{s}_j = 0$ untuk semua $i \neq j$ dan $s_i's_i = 1$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$

BUKTIKAN

- Jika $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor yang **ortogonal**, maka S juga merupakan himpunan vektor-vektor yang **bebas linear**.