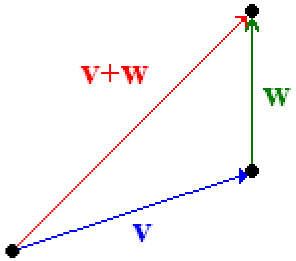
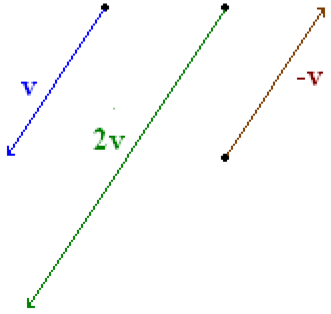
Ruang Vektor





Definisi

Himpunan yang isinya berupa vektor-vektor dimana tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. V={v1, v2, ...} memiliki sifat:

1. Tertutup terhadap operasi penjumlahan $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ maka $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$
2. Tertutup terhadap operasi perkalian $k \in R$, $\underline{v} \in V$ maka $k\,\underline{v} \in V$

   Kedua syarat tersebut di atas harus dipenuhi agar dapat disebut sebagai ruang vektor.

Ilustrasi:

Apakah himpunan berunsur vektor berikut ini merupakan ruang vektor

1. $\{(x, y, x+2y); x, y \in R\}$
2. $\{(x, y, 3xy); x, y \in R\}$

Jawaban

Jawab

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix}$

Syarat 1:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1+2y_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2+2y_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{c} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1+2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2+2y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ (x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \end{pmatrix}$$

Maka $\underline{c} \in \upsilon$

Syarat 2:

$\underline{b} = k\underline{a}$

$$= k\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kx+2ky \end{pmatrix}$$

Maka $\underline{b} \in \upsilon$

Jawaban (lanjutan)

b) $\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3xy \end{pmatrix}$

Syarat 1:

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 3x_1y_1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3x_2y_2 \end{pmatrix}$

$$\underline{c} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 3x_1y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3x_2y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ \boxed{3(x_1y_1 + x_2y_2)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{harusnya}} 3[(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] = 3(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2)$$

Maka $\underline{c} \notin \upsilon$

Atau
Syarat 2:

$$\underline{b} = k\underline{a} = k\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ \boxed{3kxy} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{harusnya}} 3kxky = 3k^2xy$$

Maka $\underline{c} \notin \upsilon$

Latihan

R^2 Himpunan vektor-vektor yang bentuknya

$$R^2 = \left\{ \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in R \right\}$$

1. Periksa apakah jika $\underline{v}_1 \in R^2$, $\underline{v}_2 \in R^2$ maka $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in R^2$
2. Jika $k \in R$ dan $\underline{v} \in R^2$, periksa apakah $k\underline{v} \in R^2$

Latihan (lanjutan)

Dari setiap bilangan riil kita dapat membuat himpunan bagian:

$$V = \left\{ \underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}; a \in R \right\} \subset R^2 \qquad W = \left\{ \underline{w} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}; a \in R \right\} \subset R^2$$

1. Periksa apakah V memiliki sifat ruang vektor
2. Periksa apakah W memiliki sifat ruang vektor

Himpunan bagian Ruang Vektor

V dan W adalah himpunan bagian dari R^2 , tapi:

- V tidak punya sifat ruang vektor
- W punya sifat ruang vektor

Himpunan bagian suatu ruang vektor yang memiliki sifat ruang vektor disebut anak ruang vektor.

Menyederhanakan Pengecekan RV

$$\left.\begin{array}{l} k \in R \\ \underline{v}_1 \in V \end{array}\right\} \; k\underline{v}_1 \in V$$

$$\left.\begin{array}{l} l \in R \\ \underline{v}_2 \in V \end{array}\right\} \; l\underline{v}_2 \in V$$

$$\left.\begin{array}{l} k\underline{v}_1 \in V \\ l\underline{v}_2 \in V \end{array}\right\} \; \boxed{k\underline{v}_1 + l\underline{v}_2 \in V}$$

Cukup hanya ini yang diperiksa

Latihan

1. Periksa apakah himpunan berikut adalah anak ruang vektor dari R^2

$$S = \left\{ \underline{s} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}, a \in R \right\}$$

2. Periksa apakah himpunan vektor-vektor berikut adalah anak ruang vektor

$$M = \left\{ \underline{m} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}, a \in R \right\} \subset R^2 \qquad P = \left\{ \underline{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ ab \end{pmatrix}, a, b \in R \right\} \subset R^3$$

$$K = \left\{ \underline{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}, a, b \in R \right\} \subset R^3$$