Aljabar Matriks

Pangkat, Matriks Kebalikan dan Matriks Kebalikan Umum

Operasi Baris Elementer

- Materi ini mengasumsikan peserta sudah menguasasi operasi baris/kolom elementer (elementary operator):
  - $E_{i(k)}$: mengalikan baris ke-*i* dengan konstanta *k*
  - E_{ij} : menukar baris ke-*i* dan baris ke-*j*
  - $E_{ij(k)}$: mengalikan baris ke-*j* dengan *k*, kemudian menjumlahkannya dengan baris ke-*i*

Pangkat Matriks (*Rank*)

- Pangkat dari sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$, dilambangkan r(**A**), adalah ordo anak matriks persegi **A** yang terbesar dan determinannya tidak sama dengan nol

- Operasi baris/kolom elementer tidak mengubah pangkat dari sebuah matriks

Pangkat Matriks

- Pangkat dari matriks **A** sama dengan ordo matriks identitas pada bentuk kanonik **A** yang diperoleh melalui operasi baris/kolom elementer.

Matriks Berpangkat Penuh

- Untuk ${}_mA_n$ dengan $m < n$ dan $r(A) = m$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat baris penuh (*full row rank*)
- Untuk ${}_mA_n$ dengan $m > n$ dan $r(A) = n$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat kolom penuh (*full column rank*)
- Untuk ${}_nA_n$ dengan $r(A) = n$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat penuh (*full rank*)

Matriks Kebalikan

- Matriks kebalikan bagi ${}_n\mathbf{A}_n$ dilambangkan $\mathbf{A}^{-1}$ adalah matriks yang memenuhi $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Penghitungan Matriks Kebalikan

Untuk memperoleh matriks **B** = $[b_{ij}]$ = $\mathbf{A}^{-1}$ dapat dilakukan dengan menghitung

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\mathbf{A}$$

dengan adj**A**, matriks adjoint **A**, adalah matriks yang berisi cofactor dari **A** kemudian di-transpose

Contoh

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

det(A) = 2x9 – 5x3 = 3

C_{11} = 9

C_{12} = -3

C_{21} = -5

C_{22} = 2

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat Keberadaan Matriks Kebalikan

- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada untuk matriks **A** yang persegi
- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada jika det(**A**) ≠ 0

Matriks Singular & Non-Singular

- Matriks persegi **A** disebut matriks singular jika dan hanya jika tidak ada matriks **B** sehingga **AB**=**BA**=**I**, atau **A** tidak memiliki matriks kebalikan

- Matriks persegi **A** yang memiliki kebalikan disebut sebagai matriks non-singular

- Matriks **A** non-singular <-> **A** berpangkat penuh <-> det(**A**) $\neq$ 0

Sifat-Sifat

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^{-1}$ bersifat unik
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- untuk A dan B yang non-singular, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Sifat-Sifat

- Jika A adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal a_{ii}, maka A^{-1} adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal $1/a_{ii}$
- Jika A adalah matriks ortogonal, maka $A^{-1} = A'$
- Jika A matriks simetrik, maka A^{-1} juga simetrik

Matriks Kebalikan Umum

- Matriks kebalikan umum bagi ${}_m\mathbf{A}_n$ dilambangkan ${}_n\mathbf{G}_m$ adalah matriks yang memenuhi $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$

Algoritma Mencari **G**

- Tentukan pangkat dari **A**, misal k
- Cari anak matriks persegi $k \times k$ yang non-singular, misal **W**
- Cari matriks kebalikan **W**, yaitu $\mathbf{W}^{-1}$
- Transpose matriks $\mathbf{W}^{-1}$, yaitu $(\mathbf{W}^{-1})^T$
- Ganti unsur di **A** dengan unsur $(\mathbf{W}^{-1})^T$ pada posisi yang sama dengan posisi anak matriks yang digunakan
- Ganti unsur **A** yang lain dengan 0 (nol)
- Transpose matriks tersebut, dan itulah matriks **G**

Teorema

- Jika ${}_m\mathbf{A}_n$ matriks sembarang dan ${}_m\mathbf{B}_m$ adalah matriks non-singular, maka r(**BA**) = r(**A**)
- Jika ${}_m\mathbf{A}_n$ matriks sembarang dan ${}_n\mathbf{K}_p$ adalah matriks non-singular, maka r(**AK**) = r(**K**)

Gunakan kenyataan bahwa **B** dapat diperoleh dari proses operasi baris/kolom elementer terhadap matriks identitas **I**, atau **B** = **EEE…EI**. Dengan demikian r(**B**)=r(**I**). Jelas bahwa **BA** = **EEE…EIA** = **EEE..EA**, dan r(**BA**) = r(**A**).

Teorema

- Jika ${}_{m}\mathbf{P}_{n}$ dan ${}_{n}\mathbf{Q}_{p}$ adalah dua matriks sembarang, maka $r(\mathbf{PQ}) \leq \min\{r(\mathbf{P}), r(\mathbf{Q})\}$