Aljabar Matriks

Pengolahan Dasar Matriks

Bagus Sartono
bagusco@gmail.com
Departemen Statistika FMIPA – IPB

Notasi Dasar Matriks

- $\mathbf{A}_{mxn}$, ${}_m\mathbf{A}_n$, $[a_{ij}]_{mxn}$: matriks berukuran m x n (m baris, n kolom)

- a_{ij} adalah elemen matriks **A** pada baris ke-i dan kolom ke-j

Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks ${}_m\mathbf{A}_n$ dan ${}_m\mathbf{B}_n$ menghasilkan matriks baru ${}_m\mathbf{C}_n$ dengan

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ untuk semua } (i, j)$$

→ Perhatikan bahwa ukuran matriks **A** dan **B** harus sama

Penjumlahan Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 15 & 8 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan Matriks

- Sifat Dasar Penjumlahan Matriks:
  - Komutatif: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
  - Asosiatif: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

→ BUKTIKAN SIFAT DI ATAS

Perkalian dengan Skalar

Jika c adalah sebuah skalar/konstanta real, dan ${}_m\mathbf{A}_n$ adalah sebuah matriks real maka

$$c\,\mathbf{A} = {}_m\mathbf{B}_n$$

dengan $b_{ij} = c\,a_{ij}$ untuk semua (i, j)

Sifat: $c\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$

Perkalian dengan Skalar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 14 & 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

Perkalian dua buah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$ dan ${}_n\mathbf{B}_p$ menghasilkan matriks baru ${}_m\mathbf{C}_p$ dengan

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{untuk semua } (i, j)$$

→ Perhatikan ukuran matriks yang terlibat dalam perkalian

Perkalian Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1\times1+3\times4 & 1\times2+3\times5 & 1\times3+3\times6 \\ 2\times1+1\times4 & 2\times2+1\times5 & 2\times3+1\times6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 14 & 17 & 21 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

Sifat-sifat

- Tidak komutatif. **AB** = **BA**, may be yes, may be no.
- **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**
- c(**AB**) = (c**A**)**B** = **A**(c**B**)

BUKTIKAN SIFAT-SIFAT di ATAS

Transpose (Putaran)

Transpose dari matriks ${}_m\mathbf{A}_n$ dilambangkan $\mathbf{A}^T$ atau $\mathbf{A}'$ adalah matriks ${}_n\mathbf{B}_m$ dengan

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ untuk semua } (i, j)$$

Transpose (Putaran)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpose (Putaran)

Sifat-sifat

- $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
- $(c\mathbf{A})' = c\mathbf{A}'$
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

BUKTIKAN SIFAT-SIFAT di ATAS

Matriks-Matriks Spesial

- Matriks Persegi
- Matriks Diagonal
- Matriks Identitas
- Matriks Nol
- Matriks Satuan
- Matriks Simetrik
- Matriks Miring Simetrik
- Matriks Segitiga Atas/Bawah
- Matriks Idempoten
- Matriks Ortogonal

Matriks Persegi

Sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$ dikatakan sebagai matriks persegi jika dan hanya jika m = n, atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Matriks Diagonal

Sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks diagonal jika dan hanya jika

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk semua } i \neq j$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks Identitas

Matriks persegi ${}_{n}\mathbf{A}_{n}$ disebut sebagai matriks identitas dan dilambangkan I_n jika dan hanya jika

$a_{ij} = 0$ untuk semua $i \neq j$

$a_{ii} = 1$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$

Jika ${}_{m}B_{n}$ adalah sembarang matriks real, maka $\mathbf{B}\mathrm{I} = \mathbf{B}$

Jika ${}_{n}B_{m}$ adalah sembarang matirks real maka $\mathrm{I}\mathbf{B} = \mathbf{B}$

Matriks Identitas

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Nol

Sebuah matriks ${}_{m}\mathbf{A}_{n}$ disebut sebagai matriks nol dan dilambangkan ${}_{m}\mathbf{O}_{n}$ jika dan hanya jika

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk semua } (i, j)$$

Jika ${}_{m}B_{n}$ adalah sembarang matriks real, maka **BO = O**

Jika ${}_{n}B_{m}$ adalah sembarang matirks real maka **OB = O**

Matriks Satuan

Sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks satuan dan dilambangkan ${}_m\mathbf{J}_n$ jika dan hanya jika

$$a_{ij} = 1 \text{ untuk semua } (i, j)$$

Matriks Nol dan Matriks Satuan

$$\mathbf{O}_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_{4x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{4x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Simetrik

Sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks simetrik jika dan hanya jika

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ untuk semua } i \neq j$$

Dengan kata lain ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks simetrik jika dan hanya jika $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

Matriks Miring Simetrik

Sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks miring simetrik jika dan hanya jika

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ untuk semua } (i, j)$$

$$\text{dan } a_{ii} = 0 \text{ untuk semua } i = 1, 2, \ldots, n$$

Dengan kata lain ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai miring matriks simetrik jika dan hanya jika $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$

Simetrik dan Miring Simetrik

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas

Sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks segitiga atas jika dan hanya jika

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk semua } i > j$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah

Sebuah matriks persegi ${}_{n}\mathbf{A}_{n}$ disebut sebagai matriks segitiga bawah jika dan hanya jika

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk semua } i < j$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks Idempoten

Sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ disebut sebagai matriks idempoten jika dan hanya jika $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$

Matriks Ortogonal

Sebuah matriks persegi ${}_{n}\mathbf{A}_{n}$ disebut sebagai matriks ortogonal jika dan hanya jika

$$\mathbf{AA'} = \mathbf{A'A} = I_n$$

Bahan Diskusi

Andaikan data tingkat pengeluaran per hari (Rp) mahasiswa Dept Statistika Angkatan 48 dicatat dalam bentuk vektor kolom **y** berukuran 60 x 1, nyatakan statistik berikut dalam bentuk notasi matriks.

a. Jumlah pengeluaran per hari

b. Rata-rata pengeluaran per hari

c. Ragam pengeluaran per hari