Panduan Materi Praktikum Aljabar Matriks

14 Pertemuan- Tahun Ajaran 2018-2019

Pertemuan 1

Matriks dan operator pengolahnya:

- Definisi Matriks & Matriks sekatan
- Kesamaan dua matriks
- Operator arimetik
- Penjumlahan dua matriks
- Perkalian matriks dengan skalar
- Perkalian dua matriks
- Perkalian dua matriks jenis lainnya (Hadamard product, direct product)
- Matriks transpos dan sifat-sifatnya

Pertemuan 2

Matriks-matriks spesial

- Vektor baris dan vektor kolom
- Matriks diagonal
- Matriks skalar
- Matriks identitas
- Matriks simetrik
- Matriks Ortogonal
- Matriks idempoten
- Matriks Jn dan In
- Matriks biner
- Matriks definit positif/negatif, semi definit positif, dsb
- Teras matriks
- Ilustrasi manfaat pengolahan dasar matriks sebagai bahasa ringkas dan lugas untuk ungkapan penjumlahan

Praktik aplikasi dengan software R

Jenis matriks dan Ilustrasinya

```
#Matriks Spesial
##1 Matriks Diagonal
D <- diag(c(1,2,3,4))  #matriks diagonal 4 x 4
###output
#> D
#      [,1] [,2] [,3] [,4]
#[1,]    1    0    0    0
#[2,]    0    2    0    0
#[3,]    0    0    3    0
#[4,]    0    0    0    4

##2 Matriks Skalar
D1 <- 5*diag(c(1,1,1)) #matriks skalar 5I
###output
```

```
#> D1
#      [,1] [,2] [,3]
#[1,]     5    0    0
#[2,]     0    5    0
#[3,]     0    0    5

##3 Matriks Identitas
I <- diag(c(1,1))       # matriks identitas 2 x 2
###output
#> I
#      [,1] [,2]
#[1,]     1    0
#[2,]     0    1

##Apakah matriks skalar termasuk matriks diagonal?
##Apakah matriks identitas termasuk matriks diagonal?
##Lalu apakah matriks 0 berikut termasuk matriks diagonal?
O <- diag(c(0,0,0,0,0))
###output
#> O
#      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
#[1,]     0    0    0    0    0
#[2,]     0    0    0    0    0
#[3,]     0    0    0    0    0
#[4,]     0    0    0    0    0
#[5,]     0    0    0    0    0

##Periksa apakah matriks D, D1, I, dan O di atas termasuk matriks simetri?
##Manakah yang merupakan matriks idempoten?

##4 Matriks Ortogonal
##Periksa apakah matriks A di bawah ini merupakan matriks ortogonal?
A <- diag(c(1,-1))
A <- matrix(c(3/5,4/5,0,0,0,1,-4/5,3/5,0),3,3,byrow=T)
```

Manfaat pengolahan dasar matriks sebagai bahasa ringkas dan lugas untuk ungkapan penjumlahan

Ilustrasi kasus:

Andaikan perkuliahan statistika terbagi atas dua kelompok paralel dengan 50 dan 100 mahasiswa. Hasil ujian akhir berdasarkan jenis kelamin mahasiswa pada setiap kelompok tercantum pada tabel berikut

Nilai	Kelompok A			Kelompok B		
	Laki-laki	Perempuan	Total	Laki-laki	Perempuan	Total
A	4	6	**10**	5	8	**13**
B	5	6	**11**	10	13	**23**
C	10	15	**25**	25	25	**50**
D	1	3	**4**	5	2	**7**
E	0	0	**0**	5	2	**7**
Total	**20**	**30**	**50**	**50**	**50**	**100**

a. Sajikan data nilai tersebut untuk setiap kelompok perkuliahan dalam bentuk matriks
b. Ungkapkan bahasa aljabar matriks untuk menyatakan nilai akhir matematika gabungan kedua kelompok di atas
c. Dengan bahasa aljabar matriks sajikan persentase sebaran nilai untuk gabungan kedua kelompok

```
#Jawaban Ilustrasi Kasus Pert 2
##a Sajian matriks dari data
A <- matrix(c(4,5,10,1,0,6,6,15,3,0,5,10,25,5,5,8,13,25,2,2),5,4)
colnames(A)<-c("Kel A(L)","Kel A(P)","Kel B(L)","Kel B(P)")
rownames(A)<-c("Nilai A","Nilai B","Nilai C","Nilai D","Nilai E")
#> A
#         Kel A(L) Kel A(P) Kel B(L) Kel B(P)
#Nilai A        4        6        5        8
#Nilai B        5        6       10       13
#Nilai C       10       15       25       25
#Nilai D        1        3        5        2
#Nilai E        0        0        5        2


##b Nilai akhir matematika gabungan kedua kelompok
G <- A%*%c(1,1,1,1)
#> G
#         [,1]
#Nilai A    23
#Nilai B    34
#Nilai C    75
#Nilai D    11
#Nilai E     7

##c Persentase sebaran nilai untuk gabungan kedua kelompok
P <- G/sum(G)*100
#> P
#              [,1]
#Nilai A 15.333333
#Nilai B 22.666667
#Nilai C 50.000000
#Nilai D  7.333333
#Nilai E  4.666667
```

Pertemuan 3

Determinan

- Definisi
- sifat-sifat
- ilustrasi tafsirannya

Pertemuan 4

Rank Matriks

- Operasi baris (kolom) elementer (OBE/OBK); Matriks echellon baris (tereduksi), dan kesetaraan dua matriks

Pertemuan 5

Matriks kebalikan dan kebalikan umum

- Matriks Kebalikan (keujudan dan keunikan)
- Matriks Kebalikan umum (keujudan dan ketak-unikan)
- Sifat-sifat matriks kebalikan umum X'X

Pertemuan 6

Solusi sistem persamaan linier (SPL)

- SPL homogen dan nonhomogen
- SPL konsisten (solusi unik ataukah tidak unik) dan tak konsisten

Pertemuan 7

Solusi sistem persamaan linier (SPL)

- Solusi eksak atau aproksimasi/ algoritmik
- Solusi (eksak SPL dengan metode Cramer, Grauss, Grauss-Jordan dan matriks kebalikan umum

Praktik aplikasi dengan software R

Ilustrasi kasus SPL dan bagaimana mencari solusi SPL tersebut

```
##Pencarian solusi SPL
A <- matrix(c(2,3,4,3,2,1,3,3,2),3,3)
b <- c(24,23,20)
x <- solve(A,b)   #solusi SPL
#> A
#      [,1] [,2] [,3]
#[1,]    2    3    3
#[2,]    3    2    3
#[3,]    4    1    2
#> b
#[1] 24 23 20
#> x
#[1] 3 4 2

##Cari solusi SPL dari matriks A dan vektor b berikut
A <- matrix(c(1,0.06,0.06,1,0.08,0.08,1,-0.1,0.1),3,3)
b <- c(5,0.2,0.4)

A <- matrix(c(2,2,3,2,4,3),2,3)
b <- c(80,60)
```

Ilustrasi Kasus

Misalkan pakan X, Y, dan Z digunakan untuk beternak ayam, bebek, dan itik. Banyaknya unit pakan yang tersedia dan yang dikonsumsi setiap minggu oleh masing-masing ternak tercantum pada tabel berikut

Jenis Pakan	Jenis Unggas			Tersedia
	Ayam	Bebek	Itik	
X	1	3	2	44
Y	1	4	1	49
Z	2	5	5	83

Berapa banyak setiap jenis unggas itu dapat dipelihara agar semua pakan habis terpakai?

```
#Jawaban Ilustrasi Kasus Pert 7
A <- matrix(c(1,1,2,3,4,5,2,1,5),3,3)
b <- c(44,49,83)
x <- solve(A,b)  #solusi SPL

#Tidak konsisten ataukah konsisten dengan banyak solusi?
```

Pertemuan 8

Ruang Vektor Real

- Tinjauan ulang ruang vektor dari aspek geometriks
- Konsep RV real dari aspek analitik dan sifat-sifatnya serta ciri-cirinya dengan ilustrasinya
- Aksioma RV (real) sebagai suatu sistem matematika (berikan contoh ruang vektor yang bukan Rn)
- Anak ruang vektor
- Kombinasi linier dan

Pertemuan 9

Ruang Vektor Real

- Bebas linier & terpaut linier
- Landasan dan dimensi ruang vektor
- Ruang baris dan ruang kolom suatu matriks

Pertemuan 10

Ruang Euclid

- Ilustrasi ruang Euclid (R2 / R3)
- Konsep dasar hasilkali dalam & konsep norm
- Ketaksamaan Cauchy-Scwartz
- Konsep jarak: Jarak Euclid dan jarak bukan-Euclid
- Keortogonalan vektor-vektor dan ruang-ruang vektor
- Pembangkitan landasan dengan proses Gramm Schmidt
- Teorema Pythagoras
- Teorema Proyeksi
- Teorema Aproksimasi Terbaik
- Ilustrasi dan berbagai contoh terapan

Pertemuan 11

Transformasi Linier

- Konsep dasar transformasi linier
- Kernel dan rank transformasi linier
- Aljabar transformasi linier

- Representasi matriks dari transformasi linier
- Sifat transformasi linier ortogonal

Pertemuan 12

Pendiagonalan Matriks Persegi

- Pasangan akar ciri dan vektor ciri matriks
- Akar ciri dan vektor ciri matriks spesial
- Matriks terdiagonalkan dan tak terdiagonalkan
- Keserupaan dan kesebangunan dan matriks persegi
- Dekomposisi spektral

Praktik aplikasi dengan software R

Ilustrasi penentuan akar ciri dan vektor ciri suatu matriks

```
##Penentuan akar ciri dan vektor ciri
A <- matrix(c(1,1,2,3,4,5,2,1,5),3,3)
e <- eigen(A)     #akar ciri dan vektor ciri
#> A
#     [,1] [,2] [,3]
#[1,]    1    3    2
#[2,]    1    4    1
#[3,]    2    5    5
#> e
#$values
#[1]  7.828427e+00  2.171573e+00 -2.444740e-16
#
#$vectors
#           [,1]       [,2]       [,3]
#[1,] -0.3952223  0.1080857 -0.9622504
#[2,] -0.3274129 -0.5218839  0.1924501
#[3,] -0.8582541  0.8461410  0.1924501

##Apakah matriks A tersebut bersifat nonsingular?
##Lakukan pendiagonalan pada matriks A
X <- e$vectors
Xi<- solve(e$vectors)
D <- diag(e$values)

#> X
#           [,1]       [,2]       [,3]
#[1,] -0.3952223  0.1080857 -0.9622504
#[2,] -0.3274129 -0.5218839  0.1924501
#[3,] -0.8582541  0.8461410  0.1924501
#> Xi
#           [,1]      [,2]       [,3]
#[1,] -0.3330124 -1.056173 -0.6088889
#[2,] -0.1292204 -1.140813  0.4947108
#[3,] -0.9169681  0.305656  0.3056560
#> D
#         [,1]     [,2]         [,3]
#[1,] 7.828427 0.000000  0.00000e+00
#[2,] 0.000000 2.171573  0.00000e+00
#[3,] 0.000000 0.000000 -2.44474e-16
```

```
###Pendiagonalan
Aa <- X%*%D%*%Xi
Dd <- Xi%*%Aa%*%X

#> Aa
#     [,1] [,2] [,3]
#[1,]    1    3    2
#[2,]    1    4    1
#[3,]    2    5    5
#> Dd
#             [,1]         [,2]          [,3]
#[1,] 7.828427e+00 2.866631e-16  2.141841e-16
#[2,] 7.784572e-17 2.171573e+00 -1.355253e-18
#[3,] 2.386158e-16 7.050680e-17 -5.269786e-16

#Periksa apakah matriks berikut dapat didiagonalkan?
B <- matrix(c(1,2,3,4,5,6,7,8,9),3,3)
C <- matrix(c(1,2,3,2,2,4,3,4,8),3,3)
```

Pertemuan 13

Bentuk Biliner dan Bentuk Kuadrat

- Definisi bentuk kuadrat
- Karakteristik bentuk kuadrat
- Ilustrasi tafsiran bentuk kuadrat di R^2

Pertemuan 14

Pendiferensiasian matriks

- Pendiferensiasian vektor
- Pendiferensiasian matriks
- Pendiferensiasian bentuk kuadrat