



STK 572

Manajemen Data Statistik

Pertemuan 12

Tim Dosen:

Dr. Farit Muhammad Affendi

Dr. Agus M Soleh

Pembangkitan Bilangan Acak

Dr. Agus M Soleh

agusms@apps.ipb.ac.id



Pendahuluan

- Pembangkitan bil. acak merupakan alat yang diperlukan dalam komputasi statistik → umumnya untuk simulasi
- Bilangan acak yang dibangkitkan merupakan pseudorandom (acak yang semu)
- Bilangan acak yg dibangkitkan diharapkan memenuhi sebaran statistik tertentu (pdf/pmf, cdf)
- Semua metode pembangkitkan bil. acak tergantung dari pembangkitan bil. acak uniform



Pembangkitan Bil. Acak Uniform

- Metode sederhana untuk bangkitkan bil. acak Uniform (0,1)
 - Misal m bil. bulat yg besar dan b bil. bulat
 - $b < m$
 - Nilai b dipilih biasanya dekat akar dari m
 - Langkah awal memilih seed: x_0 antara 1 dan m
 - Generator bil. acak :
 - $x_1 = b x_0 \pmod{m}$
 - $u_1 = x_1/m$
 - u_1 adalah bil. acak semu pertama Uniform(0,1)



Pembangkitan Bil. Acak Uniform

- Bil. acak berikutnya diulang
 - $x_2 = b x_1 \pmod{m}$
 - $u_2 = x_2/m$
- Secara umum:
 - $x_n = b x_{n-1} \pmod{m}$
 - $u_n = x_n/m$



Pembangkitan Bil. Acak Uniform

- Ilustrasi:

- $m=30269$ $b=171$ $x_0=23121$

```
/* Rudimentary Pseudorandom Number Generator */  
DATA _NULL_;  
FILE 'RANDOM.DAT';  
B = 171;  
M = 30269;  
SEED = 23121;  
X = SEED;  
DO I = 1 TO 5;  
    X = MOD(B*X, M);  
    U = X/M;  
    PUT X U;  
END;  
RUN;  
QUIT;
```

OUTPUT:

18721	0.61849
23046	0.76137
5896	0.19479
9339	0.30853
22981	0.75923



Pembangkitan Bil. Acak Uniform

- Bangkitkan data sebanyak 100:
 - $m=7$ $b=3$ $x_0=2$
 - $m=29241$ $b=171$ $x_0=3$

Membangkitkan Bilangan Acak

- SAS telah menyiapkan banyak fungsi untuk membangkitkan data berdasarkan sebaran
- Fungsi RAND diikuti dengan nama sebaran atau nama sebarannya
 - Contoh:

```
data ...;  
  x1 = uniform(seed);  
  x2 = rand('UNIFORM');  
run;
```
- Pembangkit bilangan menggunakan *seed* yang umumnya mengambil waktu di komputer, selainnya call streaminit(seed)



Peluang Sebaran

- Fungsi density/mass (pdf/pmf) :
 - PDF ('sebaran')
- Fungsi kumulatif (cdf)
 - CDF('sebaran')
- Fungsi quantile/invers
 - QUANTILE('sebaran')



Sebagian Fungsi sebaran dalam SAS

Distribution	SAS DISTNAME
Beta	BETA
binomial	BINOMIAL
Cauchy	CAUCHY
chi-square	CHISQUARE
exponential	EXPONENTIAL
F	F
gamma	GAMMA
geometric	GEOMETRIC
hypergeometric	HYPERGEOMETRIC
inverse normal	IGAUSS*
Laplace	LAPLACE
logistic	LOGISTIC
lognormal	LOGNORMAL
negative binomial	NEGBINOMIAL
normal	NORMAL
Poisson	POISSON
Student's t	T
Uniform	UNIFORM
Weibull	WEIBULL



Bagaimana jika belum ada
fungsi pembangkit bil.
acak?



Teknik Pembangkitan Bil. Acak

- Teknik umum dalam pembangkitan bil. acak
 - Inverse-transform method
 - Acceptance-rejection method
 - Other Special techniques

Direct Transformation, Convolution

Inverse Transform Method

- Berdasarkan teori Probability Integral Transformation: Jika X adalah peubah acak kontinu dengan cdf $F(x)$, maka $U = F(X) \sim \text{Uniform}(0,1)$.
- Menerapkan transformasi integral peluang. Didefinisikan transformasi invers:
 - $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) = u\}$, $0 < u < 1$
 - Jika $U \sim \text{uniform}(0,1)$, maka untuk semua x anggota R
 - $P(F_x^{-1}(u) \leq x) = P(\inf\{t : F_x(t) = U\} \leq x) = P(U \leq F_x(x)) = F_U(F_x(x)) = F_x(x)$
 - Akhirnya $F_x^{-1}(u)$ memiliki sebaran yang sama dengan X

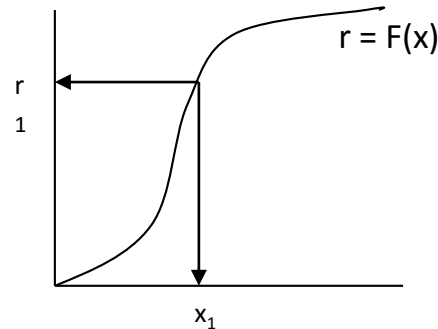


Inverse Transform Method

- Konsep:

- Untuk fungsi cdf : $r = F(x)$
- Bangkitkan data dari uniform (0,1)
- Maka x :

$$x = F^{-1}(r)$$



Inverse Transform Method

- Ilustrasi:
 - Diketahui pdf : $f(x) = 3x^2, 0 < x < 1$
 - $F_X(x) = x^3, 0 < x < 1$
 - $F_X^{-1}(u) = u^{1/3},$
 - Dalam SAS (misal membangkitkan 1000):

```
data acak(keep=x);  
  DO I=1 TO 1000;  
    U=RAND('UNIFORM');  
    X=U**(1/3);  
    OUTPUT;  
  END;  
RUN;  
  
PROC UNIVARIATE;  
  HIST X;  
RUN;
```



Inverse Transform Method

- Latihan:
 - X dari sebaran eksponensial dengan mean $1/\lambda$
 - Jika $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, maka untuk $x > 0$ cdf dari X adalah
$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
 - Bangkitkan $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ sebanyak 1000



ITM: Sebaran Diskret

- Jika $X \sim p.a.$ diskret dan $\dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots$ adalah titik tidak kontinu dari $F_X(x)$, maka transformasi inversnya adalah $F_X^{-1}(u) = x_i$ dimana $F_X(x_{i-1}) < u < F_X(x_i)$.
- Langkah:
 - Bangkitkan uniform $(0,1)$
 - Tentukan x_i dimana $F_X(x_{i-1}) < u < F_X(x_i)$



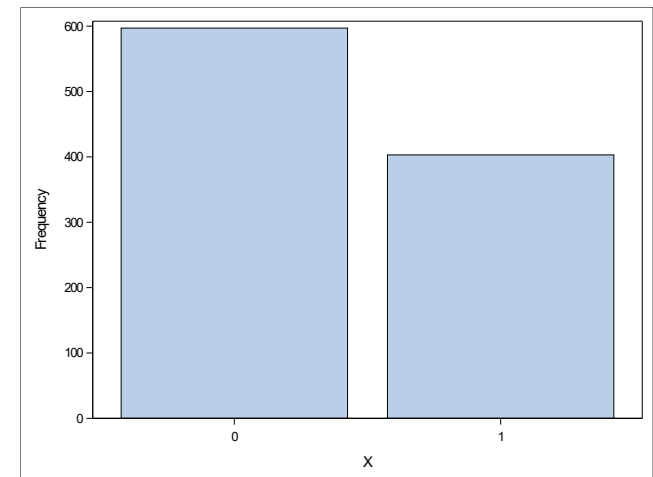
ITM: Sebaran Diskret

- Ilustrasi:
 - Membangkitkan bil. acak \sim Bernoulli (0.4)
 - $F_X(0) = f_X(0) = 1-p$ dan $F_X(1) = 1$.
 - $F_X^{-1}(u) = 1$ jika $u > 0.6$
 - $F_X^{-1}(u) = 0$ jika $u \leq 0.6$

– Dalam SAS

```
data acak(keep=x);  
  DO I=1 TO 1000;  
    U=RAND('UNIFORM');  
    X=(U>0.6);  
    OUTPUT;  
  END;  
RUN;
```

```
PROC SGPLOT;  
  VBAR X;  
RUN;
```



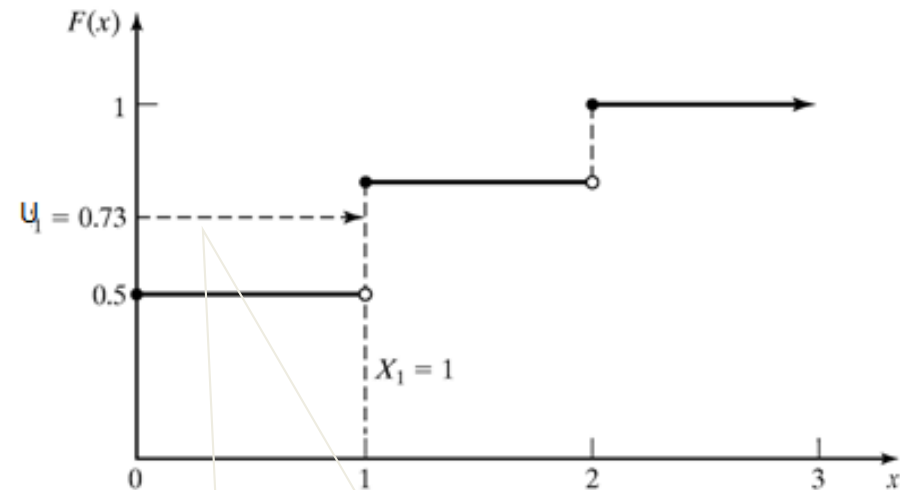
ITM: Kasus Sebaran Diskret

- Ilustrasi: Misal banyaknya pengiriman, x , dari suatu perusahaan adalah 0, 1, atau 2 kali
 - Data – Sebaran Peluang:

x	$p(x)$	$F(x)$
0	0.50	0.50
1	0.30	0.80
2	0.20	1.00

- Metode– **Diberikan U**,
Skema pembangkit:

$$x = \begin{cases} 0, & U \leq 0.5 \\ 1, & 0.5 < U \leq 0.8 \\ 2, & 0.8 < U \leq 1.0 \end{cases}$$



Perhatikan $U_1 = 0.73$:

$$F(x_{i-1}) < U \leq F(x_i)$$

$$F(x_0) < 0.73 \leq F(x_1)$$

Maka, $x_1 = 1$



Bagaimana jika sulit untuk
mendapatkan cdf?



Acceptance-Rejection method

- Misalkan X dan Y adalah peubah acak dengan pdf/pmf f dan g dan terdapat konstanta c sehingga

$$f(t) / g(t) \leq c. \text{ Untuk semua } t: f(t) > 0$$

- Teknik:
 1. Tetapkan peubah acak Y dengan density g yg memehuni $f(t)/g(t) \leq c$. Untuk semua $t: f(t) > 0$.
 2. Untuk setiap satu bil. acak:
 - a. Bangkitkan y acak dari sebaran dengan density g
 - b. Bangkitkan u acak dari sebaran Uniform(0,1).
 - c. Jika $u < f(y)/(c g(y))$ terima y dan $x=y$; selainnya tolak y dan ulangi langkah 2(a)



Acceptance-Rejection method

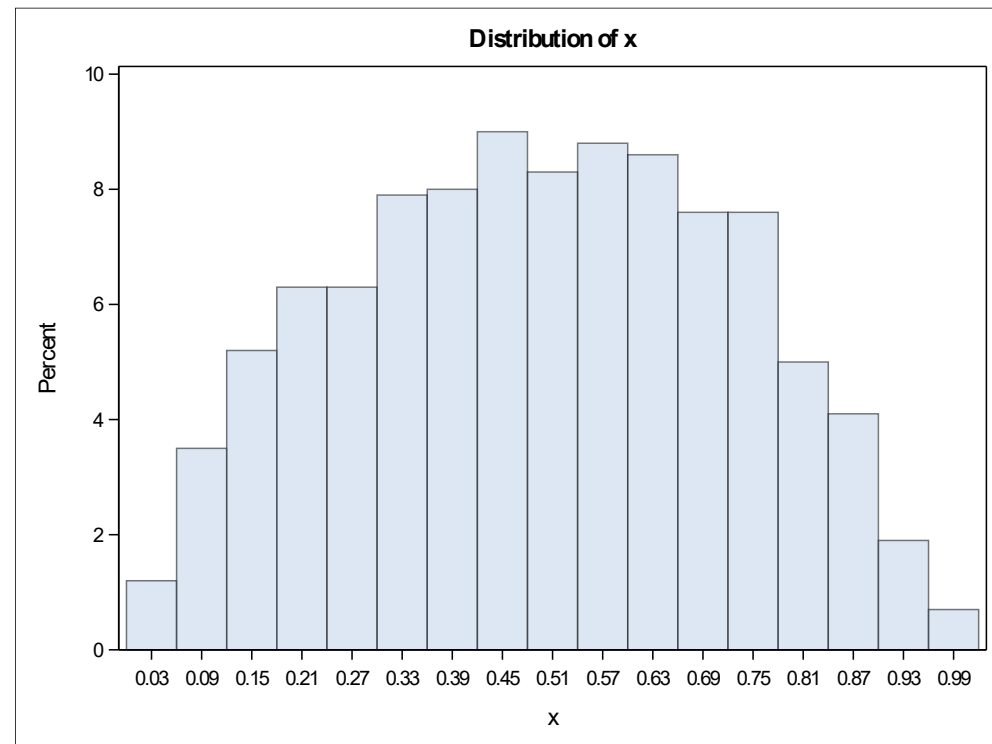
- Ilustrasi:
 - Membangkitkan bil. acak sebaran beta (shape1=2, shape2=2)
 - Pdf dari beta(2,2) : $f(x) = 6x(1-x)$, $0 < x < 1$.
 - Tahap:
 1. Ambil $g(x)$ dari sebaran Uniform(0,1)
 2. Maka $f(x)/g(x) \leq 6$ untuk $0 < x < 1$.
 3. Sebuah x acak dari $g(x)$ diterima jika
$$f(x) / [c g(x)] = 6x(1-x) / [6(1)] = x(1-x) > u$$



Acceptance-Rejection method

- Dalam SAS:

```
data acak(keep=x);  
  n = 1000;  
  k = 0;  
  do while (k < n);  
    u=RAND('UNIFORM');  
    x=RAND('UNIFORM');  
    if (x*(1-x) > u) then do;  
      k = k+1;  
      output;  
    end;  
  end;  
RUN;  
  
PROC UNIVARIATE;  
  HIST X;  
RUN;
```



Metode Lain: Direct Transformation

- Beberapa transformasi dari transformasi invers sebaran dapat digunakan untuk membangkitkan bil. acak:
 - Jika $Z \sim N(0,1)$, maka $V = Z^2 \sim \chi^2(1)$
 - Jika $U \sim \chi^2(m)$, $V \sim \chi^2(n)$, U dan V bebas, maka $F = (U/m) / (V/n) \sim F(m,n)$
 - Jika $Z \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(n)$ dan U dan V bebas, maka $T = Z / \sqrt{V/n} \sim t\text{-student}(n)$
 - dst





Selesai