

Statistika Non-Parametrik

STK 511 Analisis Statistika

Statistika Non-Parametrik

- Ciri statistika non-parametrik :
 - Prosedur non-parametrik -> fokus hanya pada beberapa karakteristik dibandingkan parameter populasi
 - Prosedur bebas sebaran (*free-distribution*) -> tidak terpaku pada asumsi distribusi data tertentu
- Kapan digunakan?
 - Data yang digunakan memiliki skala yang tidak memadai untuk diuji secara parametrik
 - Asumsi penting data untuk diuji secara parametrik tidak terpenuhi

One-Sample Sign Test (Uji Tanda Satu Sampel)

- Digunakan untuk menguji apakah median pada data sama dengan median yang diharapkan
- Disebut uji tanda karena data diubah menjadi serangkaian tanda + dan -
- Asumsi :
 - a. Contoh acak saling bebas dengan median (M) tidak diketahui
 - b. Skala variabel minimal ordinal
 - c. Variabel yang diamati kontinu
- Hipotesis :
 - a. (dua sisi) : $H_0: M = M_0, H_1: M \neq M_0$
 - b. (satu sisi) : $H_0: M \leq M_0, H_1: M > M_0$
 - c. (satu sisi) : $H_0: M \geq M_0, H_1: M < M_0$

Sign test

- Statistik uji

$$X_i - M_0 = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{abaikan} \\ - & \rightarrow S - \\ + & \rightarrow S + \end{cases}$$

(Hipotesis a) : $S = S' = \min(S-, S+)$

(Hipotesis b) : $S = S-$

(Hipotesis c) : $S = S+$

- Kaidah Keputusan

a. (Hipotesis a) : Tolak H_0 jika $P(x \leq S' | b(n,0.5)) \leq \alpha/2$

b. (Hipotesis b) : Tolak H_0 jika $P(x \leq S- | b(n,0.5)) \leq \alpha$

c. (Hipotesis c) : Tolak H_0 jika $P(x \leq S+ | b(n,0.5)) \leq \alpha$

Sign test

- Latihan



Mahasiswa ke-	1	2	3	4	5	6	7
Lama belajar mandiri (jam)	1.5	2.1	1.7	1.8	2.2	1.1	0.8

Apakah benar bahwa mahasiswa pada umumnya menyediakan waktu kurang dari dua jam untuk belajar mandiri?

Hipotesis : $H_0 : M \geq 2$
 $H_1 : M < 2$

Statistik Uji : $S = S^+ = 2$

Keputusan : $P(S \leq 2 | b(7,0.5)) = 0.0078 + 0.0547 + 0.1641 = 0.2266$

Kesimpulan : tidak cukup bukti untuk menolak H_0

-> umumnya mahasiswa menyediakan waktu ≥ 2 jam belajar

Wilcoxon Signed-Ranks Test

- Suatu prosedur non-parametrik untuk menguji median yang memanfaatkan arah (tanda + dan -) maupun besar arah itu.
- Asumsi :
 - a. Contoh acak saling bebas dengan median (M) tdk diketahui
 - b. Variabel yang diamati kontinu
 - c. Data diukur minimal skala interval
 - d. Pengamatan saling bebas
- Hipotesis
 - a. (Dua arah) : $H_0 : M = M_0$ vs. $H_1 : M \neq M_0$
 - b. (Satu arah) : $H_0 : M \leq M_0$ vs. $H_1 : M > M_0$
 - c. (Satu arah) : $H_0 : M \geq M_0$ vs. $H_1 : M < M_0$

Wilcoxon ...

- **Prosedur**

1. Hitung $D_i = X_i - M_0$ (jika hasilnya 0, maka abaikan)
2. Beri peringkat untuk D_i (jika ada yg sama, peringkatnya dirata-ratakan)
3. Hitung jumlah peringkat dengan tanda + (T_+) dan - (T_-)

- **Statistik Uji**

- a. (Hipotesis a) : $T = T' = \min(T_-, T_+)$
- b. (Hipotesis b) : $T = T_-$
- c. (Hipotesis c) : $T = T_+$

Wilcoxon

- Kaidah Keputusan
 - a. (Hipotesis a) : Tolak H_0 jika $T' \leq T_{n(\alpha/2)}$
 - b. (Hipotesis b) : Tolak H_0 jika $T_- \leq T_{n(\alpha)}$
 - c. (Hipotesis c) : Tolak H_0 jika $T_+ \leq T_{n(\alpha)}$

Wilcoxon

- Latihan

Mahasiswa ke-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IP	3.35	3.45	3.30	3.25	3.52	3.38	3.10	3.42	3.42	3.38

Apakah median IP suatu kelas tsb kurang dari 3.40 ?

Hipotesis : $H_0 = M \geq 3.40$; $H_1 = M < 3.40$

Wilcoxon

i	IP (X_i)	$D_i = X_i - 4.40$	Peringkat bagi $ D_i $	Peringkat bertanda bagi $ D_i $
Langkah 0		Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3
1	3.35	-0.05	5.5	-5.5
2	3.45	0.05	5.5	5.5
3	3.30	-0.10	7	-7
4	3.25	-0.15	9	-9
5	3.52	0.12	8	8
6	3.38	-0.02	2.5	-2.5
7	3.10	-0.30	10	-10
8	3.42	0.02	2.5	2.5
9	3.42	0.02	2.5	2.5
10	3.38	-0.02	2.5	-2.5
				Langkah 4
				T - = 36.5
				T + = 18.5
				n = 10

Tabel Wilcoxon

$$T_{10(0.05)} \approx 11$$

Keputusan : karena $T+ > T_{tabel}$, maka tidak tolak H_0

-> pernyataan tsb tidak dapat dibuktikan (median IP mahasiswa tak lebih dari 3.40)

Median Test

(uji perbandingan nilai tengah)

- Digunakan untuk menguji apakah sama median sampe 1 dengan median sampel 2
- Asumsi :
 - a. Data terdiri dari 2 contoh acak yang berasal dari populasi-populasi dengan median tidak diketahui
 - b. Skala data minimal ordinal
 - c. Variabel yang diukur bersifat kontinu
 - d. Dua populasi dengan bentuk sama

Median test ...

- Hipotesis : $H_0 = M_X = M_Y$; $H_1 = M_X \neq M_Y$
- Prosedur
 - a. Gabungkan data sampel X dengan Y ($n_1 + n_2$ pengamatan)
 - b. Klasifikasikan menurut tabel berikut

Hubungan terhadap median contoh	Contoh		
	1	2	Total
Di atas	A	B	A + B
Di bawah	C	D	C + D
Total	$A + C = n_1$	$B + D = n_2$	$N = n_1 + n_2$

- Statistik uji $T = \frac{(A/n_1) - (B/n_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})[(1/n_1) + (1/n_2)]}}$ di mana $\hat{p} = \frac{A+B}{N}$
- Kaidah keputusan : Tolak H_0 jika $|T| \geq z_{\text{tabel}}$

Median test ...

- Latihan

waktu konsentrasi plasma tertinggi (jam) <i>phenylbutazone</i> pada subjek normal (X)		waktu konsentrasi plasma tertinggi (jam) <i>phenylbutazone</i> pada subjek <i>cirrhosis hepatis</i> (Y)	
45.6	41.3	20.1	21.5
49.0	32.5	14.0	7.0
13.7	8.8	42.3	11.2
37.9	17.4	29.7	18.0
26.8	13.8	17.8	27.9
30.6	26.3	22.6	
4.0	14.4	15.0	
35.5		10.7	

Apakah median kedua sampel tersebut sama?

Median test ...

- Hipotesis : $H_0 = M_X = M_Y$; $H_1 = M_X \neq M_Y$
- Statistik uji

$$\text{median} = (n_1+n_2)/2 = (15+13)/2 = 14$$

Hubungan terhadap median=14	Contoh		
	X	Y	Total
Di atas	A = 9	B = 5	A + B = 14
Di bawah	C = 6	D = 8	C + D = 14
Total	$n_1 = 15$	$n_2 = 13$	$N = 28$

$$\hat{p} = (9 + 5) / 28 = 0.50$$

$$T = \frac{(9/15) - (5/13)}{\sqrt{(0.50)(1 - 0.50)[(1/15) + (1/13)]}} = 1.14$$

$$T = 1.14 < z_{\text{tabel}} = 1.96$$

-> tidak tolak H_0

Mann-Whitney Test

- Digunakan untuk menguji apakah sama median sampel 1 dengan media sampel 2 yang saling bebas
- Asumsi :
 - a. Data terdiri dari 2 contoh acak yang berasal dari populasi-populasi dengan median tidak diketahui
 - b. Skala data minimal ordinal
 - c. Variabel yang diukur bersifat kontinu
 - d. Dua sampel saling bebas

Mann-Whitney ...

- Hipotesis

- a. (Dua arah) : $H_0 : M_x = M_y$ vs. $H_1 : M_x \neq M_y$
- b. (Satu arah) : $H_0 : M_x \geq M_y$ vs. $H_1 : M_x < M_y$
- c. (Satu arah) : $H_0 : M_x \leq M_y$ vs. $H_1 : M_x > M_y$

- Prosedur

- a. Gabungkan data sampel X dengan Y
- b. Peringkatkan nilai semua amatan, jika ada ties maka dirata-ratakan
- c. Jumlah peringkat dari populasi 1 $\rightarrow S$

- Statistik Uji
$$T = S - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

Mann-Whitney ...

- Kaidah keputusan

- (Hipotesis a) : Tolak H_0 jika $T < w_{\alpha/2}$ atau $T > w_{1-\alpha/2}$, di mana $w_{1-\alpha/2} = n_1n_2 - w_{\alpha/2}$
 - (Hipotesis b) : Tolak H_0 jika $T < w_{\alpha}$
 - (Hipotesis c) : Tolak H_0 jika $T > w_{1-\alpha}$, di mana $w_{1-\alpha} = n_1n_2 - w_{\alpha}$
- w adalah nilai kritis bagi $T \rightarrow$ Tabel A.7 : Mann-Whitney

Mann-Whitney

- Latihan

Kriteria	Berat Badan (kg)					
Mahasiswa Putra (X)	63	59	74	52	70	61
Mahasiswa Putri (Y)	47	45	57	54	59	50

Apakah benar bahwa berat badan mahasiswa putra melebihi berat badan mahasiswa putri?

- Hipotesis : $H_0 = M_X = M_Y$; $H_1 = M_X \neq M_Y$

Mann-Whitney ...

Mahasiswa Putra (X)	Tinggi	63	59	74	52	70	61	Jumlah
	Peringkat	10	7.5	12	4	11	9	53.5
Mahasiswa Putri (Y)	Tinggi	47	45	57	54	59	50	
	Peringkat	2	1	6	5	7.5	3	

$$S = 53.5$$

$$T = S - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} = 53.5 - \frac{6(6 + 1)}{2} = 32.5$$

- Kaidah Keputusan

untuk $n_1=6$, $n_2=6$, dan $\alpha = 0.05 \rightarrow w_{0.05} = 8$

sehingga $w_{1-0.05} = 28$

$T=32.5 > w_{1-0.05} = 28 \rightarrow$

berat badan mahasiswa putra
melebihi berat badan mahasiswa putri

Kruskal-Wallis Test

- Digunakan untuk menguji hipotesis awal bahwa beberapa contoh berasal dari populasi yang sama/identik
- Kruskal-Wallis test digunakan untuk rancangan acak lengkap

Contoh/Perlakuan			
1	2	<i>k</i>
$X_{1.1}$	$X_{2.1}$	$X_{k.1}$
$X_{1.2}$	$X_{2.2}$	$X_{k.2}$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
$X_{1.n_1}$	$X_{2.n_2}$	$X_{k.n_k}$
R_1	R_2	R_k

Kruskal-Wallis...

- Asumsi

- a. Sampel berasal dari populasi-populasi dengan nilai median tidak diketahui
- b. Contoh saling bebas
- c. Variabel yang diukur bersifat kontinu
- d. Skala pengukuran minimal ordinal

- Hipotesis

H_0 : $M_1 = M_2 = \dots = M_k$ atau k populasi mempunyai fungsi sebaran yang identik

H_1 : Ada minimal satu $M_i \neq M_j$ dimana $i \neq j$ dan $i, j = 1, 2, \dots, k$

Kruskal-Wallis ...

- Prosedur

- a. Gabungkan data semua sampel $\sum n_i = N$
- b. Peringkatkan nilai semua amatan, jika ada ties maka dirata-ratakan
- c. Hitung jumlah peringkat untuk setiap contoh $\rightarrow R_i$

- Statistik Uji

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \left(R_i - \frac{n_i(N+1)}{2} \right)^2 \text{ atau } H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Kruskal-Wallis ...

- Kaidah Keputusan

Jika hanya melibatkan tiga contoh/perlakuan ($k=3$) dan setiap contoh terdiri dari lima atau kurang pengamatan, gunakan tabel Kruskal-Wallis (A.12). Tolak H_0 jika H atau $H_C > H_\alpha$.

Jika tabel A.12 tidak dapat digunakan, gunakan tabel Khi-Kuadrat (A.11). Tolak H_0 jika H atau $H_C > \chi_{\alpha, k-1}^2$.

Kruskal-Wallis ...

- Latihan

Tabel *serotonin* otak (5-HT), nanogram per gram, pada tiga kelompok anak tikus

Kontrol	340	340	356	386	386	402	402	417	433	495	557
LSD 0.5 mg/kg	294	325	325	340	356	371	385	402			
UML 0.5 mg/kg	263	309	340	356	371	371	402	417			

Sumber : Michele Torre, Filippo Bogetto, and Eugenio Torre, "Effect of LSD-25 and 1-Methyl-d-lysergic Acid Butanolamide on Rat Brain and Platelet Serotonin Levels", *Psychopharmacologia*, 36 (1974), 117-122

Apakah data ini cukup memberikan bukti untuk menunjukkan adanya perbedaan di antara ketiga perlakuan tersebut?

Kruskal-Wallis ...

- **Hipotesis :** H_0 = perlakuan berefek sama
 H_1 = min 1 perlakuan berbeda

Kontrol	Nilai	340	340	356	386	386	402	402	417	433	495	557	$R_{\text{kontrol}} = 203.5$
	Peringkat	7.5	7.5	11	17.5	17.5	20.5	20.5	23.5	25	26	27	
LSD 0.5 mg/kg	Nilai	294	325	325	340	356	371	385	402				$R_{\text{LSD}} = 80$
	Peringkat	2	4.5	4.5	7.5	11	14	16	20.5				
UML 0,5 mg/kg	Nilai	263	309	340	356	371	371	402	417				$R_{\text{UML}} = 94.5$
	Peringkat	1	3	7.5	11	14	14	20.5	23.5				

$$H = \frac{12}{27(27+1)} \left[\frac{203.5^2}{11} + \frac{80^2}{8} + \frac{94.5^2}{8} \right] - 3(27+1) = 6.18$$

Tabel Khi-kuadrat χ^2 db= 2 (0.05) = 5.991 $\rightarrow H > \chi^2$ tabel \rightarrow tolak H_0

Friedman test

- Analog dengan uji analisis ragam dua arah.
- Asumsi :
 - a. Data terdiri dari b kelompok
 - b. Variabelnya kontinu
 - c. Tidak ada interaksi antara kelompok dan perlakuan
 - d. Pengamatan di dalam kelompok dapat diperingkat berdasarkan besarnya

Friedman ...

- Hipotesis : $H_0 = M_1 = M_2 = \dots = M_k$
 $H_1 = \text{min ada 1 } M_i \neq M_j; i \neq j$
- Prosedur \rightarrow peringkatkan setiap pengamatan pada perlakuan yg sama, jumlahkan peringkatnya tiap kelompok
- Statistik uji

$$X_r^2 = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^k \left(R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right)^2$$

$$W = \frac{X_r^2}{b(k+1)}$$

- Kaidah keputusan : $W \geq \text{Tabel } W \rightarrow \text{tolak } H_0$

Friedman ...

- Latihan

Spesimen	Metode Penentuan		
	A	B	C
1	4000	3210	6120
2	1600	1040	2410
3	1600	647	2210
4	1200	570	2060
5	840	445	1400
6	352	156	249
7	224	155	224
8	200	99	208
9	184	70	227

Apakah data ini menunjukkan ada perbedaan di antara ketiga metode?

Friedman ...

- Hipotesis : $H_0 = M_A = M_B = M_C$
 $H_1 = \text{min 1 kesamaan dilanggar}$

Spesimen	Metode Penentuan		
	A	B	C
1	2	1	3
2	2	1	3
3	2	1	3
4	2	1	3
5	2	1	3
6	2	1	2
7	2.5	1	2.5
8	2	1	3
9	2	1	3
Total	RA = 19.5	RB = 9	RC = 25.5

Diperoleh $W = 0.8611$

$k = 3$ & $b = 9$

P-value = $P(W \geq 0.8611) \approx 0.001$

→ Tolak H_0

Terima kasih 😊