

PEUBAH ACAK

Materi 4 - STK211 Metode Statistika

Okt, 2017

Pendahuluan

- Pernahkah bertanya, mengapa dalam soal ujian penerimaan mahasiswa baru, jika jawaban benar diberi nilai 4, salah dikurangi 1 dan tidak menjawab diberi nilai nol. Bagaimana jika pada satu soal kita tidak tahu jawaban yang benar tetapi mengetahui 2 pilihan yang salah?
- Dengan membayar Rp. 10rb di suatu permainan menebak 4 angka dengan tepat akan mendapatkan kesempatan mendapatkan keuntungan 500 x lipat yaitu sebanyak Rp. 5jt. Apakah kita tertarik untuk ikut bermain?
- Pernahkah bertanya, mengapa dalam permainan judi, penjudi selalu mengeluarkan uang yang besar (kalah)?

Konsep Peubah Acak

Pendahuluan

- Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai percobaan → suatu proses yang menghasilkan data.
- Seringkali kita tidak tertarik dengan keterangan rinci hasil percobaan tersebut melainkan keterangan numeriknya.
- Sebagai teladan perhatikan percobaan melempar mata uang logam setimbang sebanyak tiga kali.
- Berikut adalah semua kemungkinan hasil pelemparan:
AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG,
yang masing-masing memiliki peluang yang sama untuk muncul atau sebesar $1/8$.

Pendahuluan

- Misalkan didefinisikan suatu peubah X di mana X adalah banyaknya sisi Angka yang muncul pada ketiga lemparan, maka peubah X ini mungkin bernilai 0, 1, 2, 3. Perhatikan tabel di bawah

Ruang Contoh	Peluang	X	Peluang
AAA	$1/8$	3	$1/8$
AAG	$1/8$	2	$3/8$
AGA	$1/8$		
GAA	$1/8$		
AGG	$1/8$	1	$3/8$
GAG	$1/8$		
GGA	$1/8$		
GGG	$1/8$	0	$1/8$

Pendahuluan

- Perhatikan bahwa peubah X memetakan setiap titik contoh ke suatu nilai tertentu.
- Peubah X tersebut selanjutnya disebut sebagai **PEUBAH ACAK**
- Setiap nilai yang mungkin diambil oleh P.A X ini memiliki peluang tertentu untuk muncul yang dapat diringkas dalam suatu fungsi yang disebut **FUNGSI PELUANG** atau **SEBARAN PELUANG**

Konsep Peubah Acak

- Peubah acak merupakan suatu fungsi yang **memetakan ruang kejadian** (daerah fungsi) ke **ruang bilangan riil** (wilayah fungsi).
- Fungsi peubah acak merupakan **suatu langkah** dalam statistika untuk **mengkuantifikasikan kejadian-kejadian alam**.
- Pendefinisian fungsi peubah acak harus mampu memetakan setiap kejadian dengan tepat ke satu bilangan riil.

Konsep Peubah Acak

Teladan:

- Percobaan pelemparan sebuah dadu bersisi enam yang seimbang. Ruang contohnya dapat disenaraikan sebagai berikut:

$$S = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

- Salah satu peubah acak yang dapat dibuat adalah:

$X =$ munculnya sisi dadu yang bermata genap

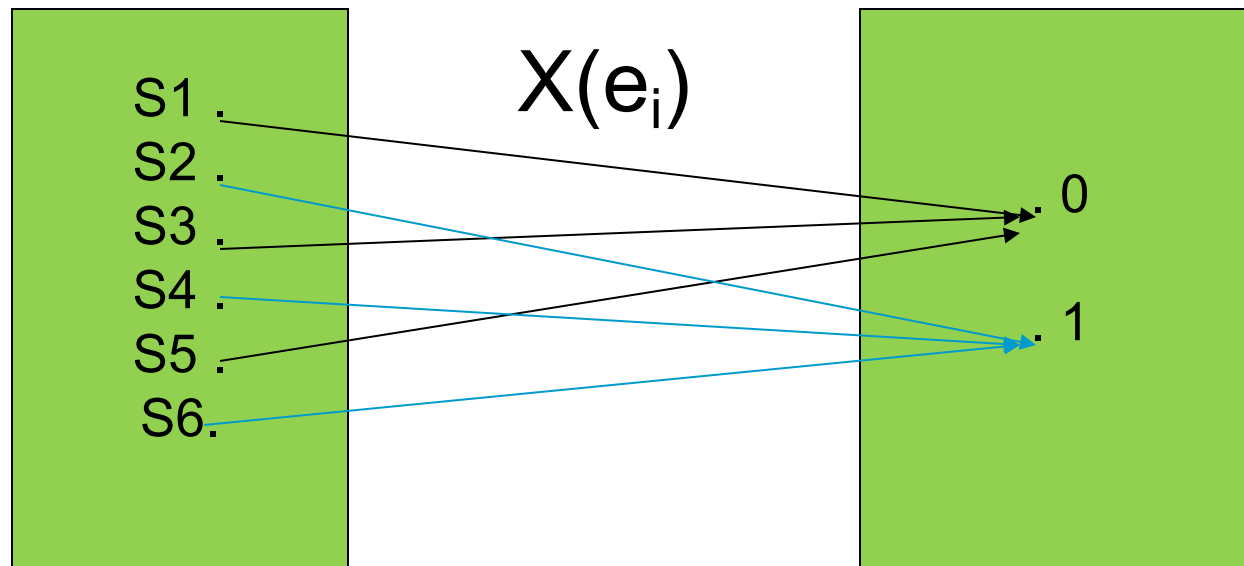
$$= \{0, 1\}$$

Konsep Peubah Acak

Pemetaan fungsi X dapat digambarkan sebagai berikut:

Daerah fungsi

Wilayah fungsi



Konsep Peubah Acak

- Jika didefinisikan peubah acak
 - a. **Nilai yang diterima** dalam menjawab 1 soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?
 - b. **Uang yang diperoleh** jika ikut bermain dalam menebak 4 angka?

Berapa nilai yang mungkin?

Konsep Peubah Acak

- Jika didefinisikan peubah acak
 - a. **Nilai yang diterima** dalam menjawab 1 soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?
 $X = \{-1, 0, 4\}$
 - b. **Uang yang diperoleh** jika ikut sekali bermain dalam menebak 4 angka?
 $X = \{-10\text{rb}, 0, 5000\text{rb}\}$

Konsep Peubah Acak

- Karena nilai peubah acak merupakan transformasi dari ruang contoh \rightarrow memiliki nilai peluang
- Berapa peluang $X=0$ atau $X=1$?

	Sisi yang muncul					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Kejadian						
Peluang kejadian	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
X	0	1	0	1	0	1

- Sebaran Peluang Peubah Acak X tergantung dari sebaran peluang kejadian aslinya.

Konsep Peubah Acak

- Sehingga sebaran peubah acak X dapat dijabarkan sebagai berikut:

- $$p(X=0) = p(S1)+p(S3)+p(S5)$$
$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

- $$p(X=1) = p(S2)+p(S4)+p(S6)$$
$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

- Atau dapat ditulis secara ringkas:

$$p(X = x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0, 1 \\ 0 & , \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Konsep Peubah Acak

- Bagaimana Sebaran Peluang untuk kasus:
 - a. Soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?
 - b. Soal Judi Permainan Menebak 4 Angka secara tepat?

Klasifikasi Peubah Acak

- Berdasarkan nilainya peubah acak diklasifikasikan:
 - a. **Peubah Acak Diskret**: apabila nilai yang mungkin diambil berupa bilangan bulat

Contoh: Bernoulli, Binom, Hipergeometrik, Poisson, Geometrik, seragam diskret, dll
 - b. **Peubah Acak Kontinu**: apabila nilai yang mungkin diambil berupa bilangan real pada suatu selang nilai tertentu

Contoh: normal, lognormal, seragam kontinu, t, F, dll

Ukuran Pemusatan dan Penyebaran Peubah Acak

- Ingat kembali!!! Peubah memiliki **pusat** dan **keragaman**
- **Nilai Harapan** (Mean/Nilai Tengah/ μ) adalah pusat dari Peubah Acak $\rightarrow E(X)$
- **Ragam** (Variance/ σ^2) adalah ukuran penyebaran dari Peubah Acak $\rightarrow \text{Var}(X)$

Nilai Harapan Peubah Acak

- **Nilai harapan** dari peubah acak adalah pemusatan dari nilai peubah acak jika percobaannya dilakukan secara berulang-ulang sampai tak berhingga kali.
- Secara matematis nilai harapan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i p(x_i), & \text{jika } X \text{ p.a diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i) dx, & \text{jika } X \text{ p.a kontinu} \end{cases}$$

Nilai Harapan Peubah Acak

Sifat-sifat nilai harapan:

- Jika c konstanta maka $E(c) = c$
- Jika p.a. X dikalikan dengan konstanta c maka $E(cX) = c E(X)$
- Jika X dan Y peubah acak maka $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Nilai Harapan Peubah Acak

- Pada teladan sebelumnya:

$$p(X = x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0, 1 \\ 0 & , \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Nilai Harapan/Nilai Tengah/Mean/ μ dari X

$$E(X) = 0(1/2) + 1(1/2) = 1/2$$

- Jika percobaan dilakukan 10 kali dan saling bebas, berapa Nilai Harapannya?

$$E(Y) = E(10 X) = 10 E(X) = 10(1/2) = 5$$

Nilai Harapan Peubah Acak

- Bagaimana Nilai Harapan untuk kasus:
 - a. Soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?
 - b. Soal Judi Permainan Menebak 4 Angka secara tepat?

Nilai Harapan Peubah Acak

- Bagaimana Nilai Harapan untuk kasus:
 - a. Soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?

Jika ada 100 soal, berapa nilai harapan nilai skornya?
 - b. Soal Judi Permainan Menebak 4 Angka secara tepat?

Jika ikut main 100 kali, berapa nilai harapan mendapatkan uang?

Ragam Peubah Acak

- Ragam peubah acak X didefinisikan sebagai

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Sifat Ragam

- Jika c konstanta maka $\text{Var}(c) = 0$
- Jika p.a. X dikalikan dengan konstanta c maka $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- Jika X dan Y peubah acak maka,

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - \text{Cov}(X, Y)$$

dalam hal ini $\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$, Jika X dan Y saling bebas maka $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Ragam Peubah Acak

- Pada teladan sebelumnya:

$$p(X = x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad x = 0, 1 \\ 0 & , \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Ragam X adalah:

$$E(X^2) = 0^2(1/2) + 1^2(1/2) = 1/2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$$

- Jika percobaan dilakukan 10 kali dan saling bebas, berapa Ragamnya?

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(10X) = 10^2 \text{Var}(X) = 100(1/4) = 25$$

Ragam Peubah Acak

- Bagaimana Ragam untuk kasus:
 - a. Soal Ujian Penerimaan Mahasiswa Baru?

Jika ada 100 soal, berapa Ragam nilai skornya?
 - b. Soal Judi Permainan Menebak 4 Angka secara tepat?

Jika ikut main 100 kali, berapa ragam mendapatkan uang?

Peubah Acak Diskret

Peubah acak yang nilai outcome-nya diperoleh dengan cara mencacah (counting)

Peubah Acak Bernoulli

- Kejadian yang diamati merupakan kejadian biner yaitu sukses atau gagal
- Peubah acaknya (X) bernilai 1 jika kejadian sukses dan 0 jika kejadian gagal
- Misal, $p=p(\text{sukses})$ dan $q=1-p(\text{sukses})$ maka fungsi peluang Bernoulli dapat dituliskan sebagai:

$$p(X = x) = p^x q^{1-x}, x = 0,1$$

- Fungsi peluang tersebut tergantung oleh besarnya parameter p , sehingga peubah acak X yang menyebar Bernoulli dituliskan $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Peubah Acak Binomial

- Terdiri dari n kejadian Bernoulli yang saling bebas dengan p yang sama
- Peubah acak Binomial merupakan jumlah dari kejadian sukses, $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- Fungsi peluang dari kejadian Binomial dapat dituliskan sebagai:
$$p(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n$$
- Fungsi peluang ini dipengaruhi oleh dua parameter, yaitu n dan p . Sehingga peubah acak X yang menyebar binomial dituliskan $X \sim \text{Binom}(n, p)$

Peubah Acak Binomial

Teladan:

- Dari suatu hasil survei diketahui bahwa suatu produk minuman suplemen digunakan oleh 6 dari 10 orang. Dari 15 orang konsumen yang kita temui, berapakah peluang
 - tepat 5 orang yang menggunakan produk tersebut
 - paling sedikit 10 orang diantaranya menggunakan produk tersebut
 - ada 3 sampai 8 orang yang menggunakan produk tersebut

Peubah Acak Poisson

- Kejadian binomial pada selang waktu atau luasan tertentu
- Jika rata-rata banyaknya kejadian sukses dalam selang tersebut adalah μ , maka:

$$p(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, x = 0, 1, \dots, \infty$$

- Jika X peubah acak menyebar poisson maka ditulis

$$X \sim \text{Poisson}(\mu)$$

Peubah Acak Poisson

Teladan

- Rata-rata kecelakaan di jalan tol diketahui terjadi 4 kali dalam sebulan. Berapa peluang bahwa terjadi kecelakaan sebanyak 6 kali dalam suatu bulan?

- Jawab:

$$p(X = 6) = \frac{e^{-4} \mu^6}{6!} = 0.1042$$

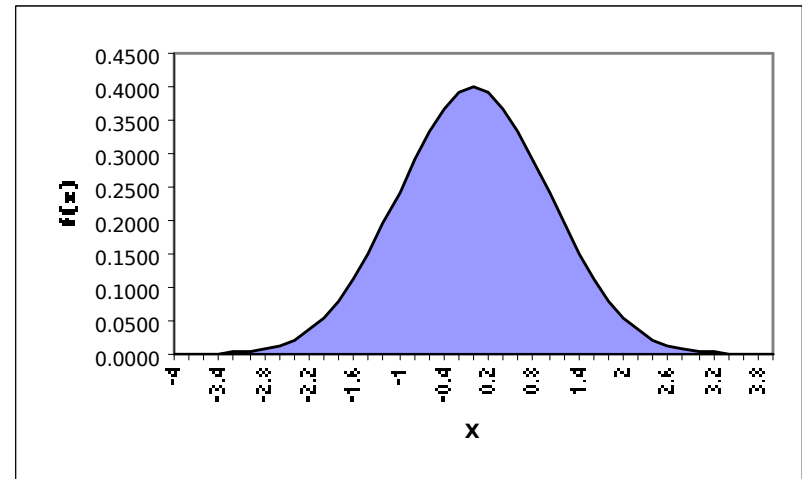
Peubah Acak Kontinu

Peubah acak yang nilai outcome-nya diperoleh dengan menggunakan alat ukur

Peubah Acak Normal

- Bentuk sebaran **simetrik**
- Mean, median dan modus berada pada nilai yang sama
- Peluang merupakan luasan dibawah **kurva kepekatan normal**

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



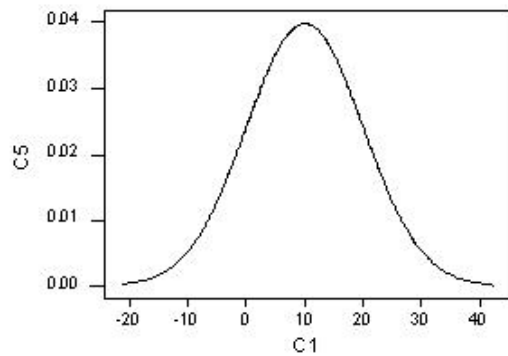
Peubah Acak Normal

- Merupakan P.A kontinu yang menjadi dasar bagi sebagian besar inferensia statistika
- Persamaan matematis bagi sebaran ini dipengaruhi oleh dua parameter, yaitu μ dan σ , yang masing-masing merupakan nilai tengah dan simpangan bakunya.
- Sehingga peubah acak X yang menyebar normal dituliskan

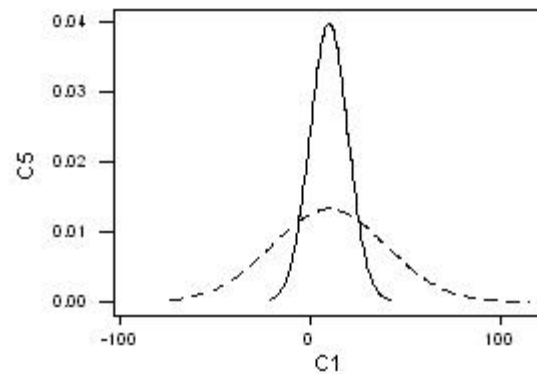
$$X \sim \text{Normal} (\mu , \sigma^2)$$

Peubah Acak Normal

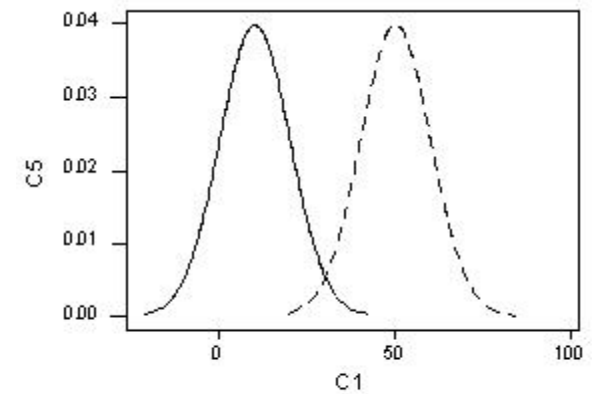
- Beberapa sebaran normal



$\mu = 10$ dan $\sigma = 10$



$\mu_2 = 10$ dan $\sigma_2 = 30$



$\mu_2 = 50$ dan $\sigma_2 = 10$

Peubah Acak Normal

- Setiap P.A Normal memiliki karakteristik yang berbeda-beda → perhitungan peluang akan sulit
- Lakukan transformasi dari $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ menjadi peubah acak normal baku $Z \sim N(0, 1)$ dengan menggunakan fungsi transformasi

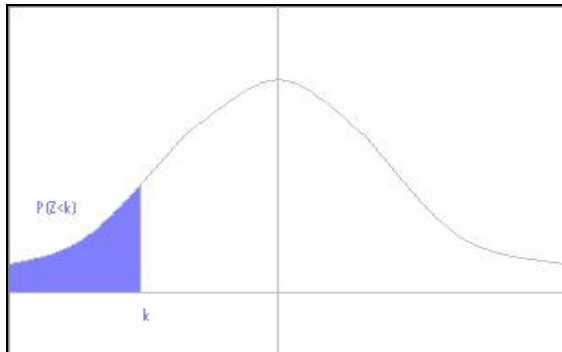
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Sebaran peluang dari peubah acak normal baku $Z \sim N(0, 1)$ sudah tersedia dalam bentuk tabel peluang normal baku

Cara penggunaan tabel normal baku

Nilai z , disajikan pada kolom pertama (nilai z sampai desimal pertama) dan baris pertama (nilai z desimal kedua)

Nilai peluang didalam tabel normal baku adalah peluang peubah acak Z kurang dari nilai k ($P(Z < k)$).



Nilai Z	0.00	0.01	0.02	0.03
-2.6	0.005	0.005	0.004	0.004
-2.5	0.006	0.006	0.006	0.006
-2.4	0.008	0.008	0.008	0.008

$P(Z < -2.42) = 0.008$

Peubah Acak Normal

Teladan

- Curah hujan dikota Bogor diketahui menyebar normal dengan rata-rata tingkat curah hujan 25 mm dan ragam 25 mm². Hitunglah peluang:
 - Curah hujan di kota Bogor kurang dari 15 mm?
 - Curah hujan di kota Bogor antara 10 mm sampai 20 mm?
 - Curah hujan di kota Bogor di atas 40 mm?

Peubah Acak Normal

Teladan

- Sebuah perusahaan alat listrik memproduksi bohlam yang umurnya menyebar normal dengan nilai tengah 800 jam dan simpangan baku 40 jam.
 - Hitunglah peluang sebuah bohlam hasil produksinya akan mencapai umur antara 778 dan 834 jam.
 - Jika ada 10% bohlam yang tidak layak jual karena umurnya terlalu pendek, berapa batas umur bohlam layak jual?

Peubah Acak Normal

Pendekatan Acak Normal terhadap Peubah Acak Binomial

- Untuk ulangan n yang besar dan peluang sukses p sekitar 0.5
- $\mu = np$ dan $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
- Untuk menghitung peluang digunakan angka koreksi kekontinuan sebesar 0.5
- Contoh : $P(X > x) = P(Z > [(x+0.5)-np] / \sqrt{np(1-p)})$

Peubah Acak Normal

Teladan

- Dalam suatu populasi lalat buah diketahui 25% diantaranya memiliki mata merah. Jika dipilih secara acak 500 ekor lalat buah, berapakah peluang didapatnya lalat buah yang bermata merah:
 - Kurang dari 100 ekor?
 - Lebih dari 150 ekor?
 - Kurang dari 150 tetapi lebih dari 100?

Selesai...