STK 211 Metode statistika

Materi 5 Sebaran Penarikan Contoh

Pendahuluan

- Andaikan ada suatu populasi dengan jumlah anggotanya sebanyak N diambil contoh sebanyak n.
- Apabila dari setiap kemungkinan contoh tersebut dihitung suatu statistik, katakanlah rata-rata ($\overline{X}$), maka semua nilai statistik tersebut akan membentuk suatu sebaran yang disebut "SEBARAN PENARIKAN CONTOH"

Definisi

- **Sebaran Penarikan Contoh (SPC)**
  - merupakan sebaran peluang bagi suatu statistik tertentu

SPC : Rata-rata Contoh

- Misalkan terdapat populasi berupa sebaran seragam diskret sebagai berikut

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/4	1/4	1/4	1/4

$$\begin{aligned}\mu_X &= E(X)\\ &= \sum_{x=0}^{3} xP(X=x)\\ &= \frac{0+1+2+3}{4}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X-\mu)^2]\\ &= \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 P(X=x)\\ &= \frac{1}{4}\left[(0-\tfrac{3}{2})^2+(1-\tfrac{3}{2})^2+(2-\tfrac{3}{2})^2+(3-\tfrac{3}{2})^2\right]\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

- Andaikan dari populasi ini diambil contoh (dengan pemulihan) dengan n=2. Semua kemungkinan statistik $\overline{X}$:

No.	Contoh	$\overline{X}$	No.	Contoh	$\overline{X}$
1	0,0	0	9	2,0	1
2	0,1	0.5	10	2,1	1.5
3	0,2	1	11	2,2	2
4	0,3	1.5	12	2,3	2.5
5	1,0	0.5	13	3,0	1.5
6	1,1	1	14	3,1	2
7	1,2	1.5	15	3,2	2.5
8	1,3	2	16	3,3	3

- sebaran peluang bagi $\overline{X}$:

$\overline{X}$	frekuensi	$P(\overline{X})$
0	1	$\frac{1}{16}$
0.5	2	$\frac{2}{16}$
1	3	$\frac{3}{16}$
1.5	4	$\frac{4}{16}$
2	3	$\frac{3}{16}$
2.5	2	$\frac{2}{16}$
3	1	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{X}} &= E(\overline{X}) \\ &= \sum_{\bar{x}=0}^{3} \bar{x} P(\overline{X} = \bar{x}) \\ &= \frac{3}{2} = \mu_X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\overline{X}} &= E\left(\left(\overline{X} - \mu_{\overline{X}}\right)^2\right) \\ &= \sum_{\bar{x}=0}^{3} (\bar{x} - \mu)^2 P(\overline{X} = \bar{x}) \\ &= \frac{5}{8} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{\sigma^2_X}{n}\end{aligned}$$

- Misalkan untuk populasi yang sama, dilakukan penarikan contoh dengan n=2 namun tanpa pengembalian, maka Semua kemungkinan statistik $\overline{X}$:

No.	Contoh	$\overline{X}$
1	0,1	0.5
2	0,2	1
3	0,3	1.5
4	1,2	1.5
5	1,3	2
6	2,3	2.5

- sebaran peluang bagi $\overline{X}$:

$\overline{X}$	frekuensi	$P(\overline{X})$
0.5	1	$\frac{1}{6}$
1	1	$\frac{1}{6}$
1.5	2	$\frac{2}{6}$
2	1	$\frac{1}{6}$
2.5	1	$\frac{1}{6}$

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \sum_{\overline{x}=0.5}^{2.5} \overline{x} P(\overline{X} = \overline{x}) = \tfrac{3}{2} = \mu_X$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = E\left[(\overline{X} - \mu_{\overline{X}})^2\right] = \sum_{\overline{x}=0.5}^{2.5} (\overline{x} - \mu)^2 P(\overline{X} = \overline{x}) = \frac{5}{12} = \frac{\frac{5}{4}}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = \frac{\sigma^2_X}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

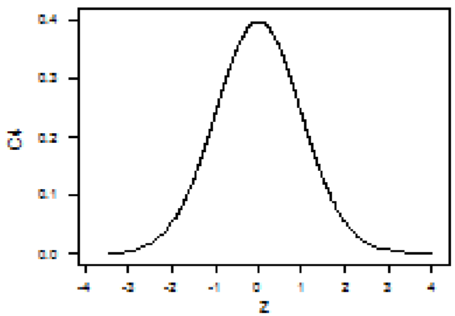
SPC : Rata-rata Contoh

- Misalkan terdapat suatu populasi dengan banyaknya anggota sebesar N, rata-rata sebesar μ dan ragam sebesar σ^2, ditarik contoh berukuran n. Maka
  - Sebaran $\overline{X}$ memiliki rata-rata sebesar μ
  - Sebaran $\overline{X}$ memiliki ragam sebesar
    - Dengan Pemulihan: $\dfrac{\sigma^2}{n}$
    - Tanpa Pemulihan: $\dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ untuk N -> ∞, $\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right) \cong 1$

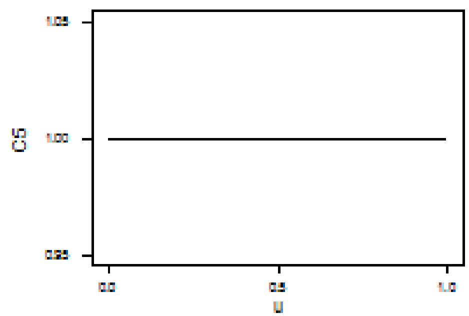
Dalil Limit Pusat

- Apabila sebaran populasi diketahui menyebar normal, maka sebaran $\overline{X}$ juga menyebar normal. Namun, apabila sebaran populasi tidak menyebar normal, maka sebaran $\overline{X}$ akan menyebar normal apabila $n \rightarrow \infty$.

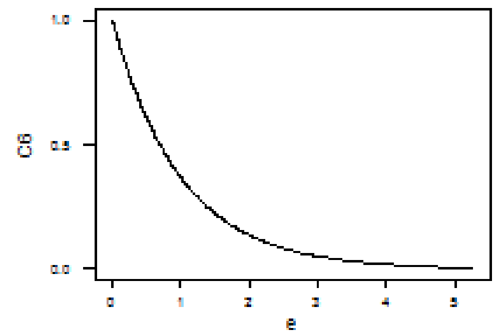
Simulasi



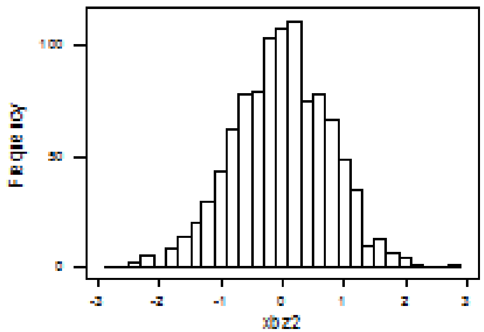
(a) Normal

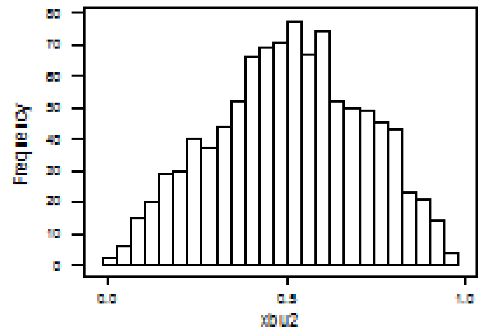


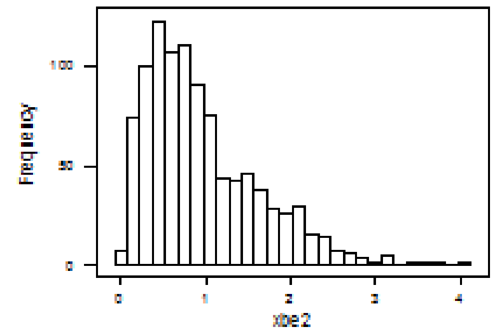
(b) Seragam Kontinu



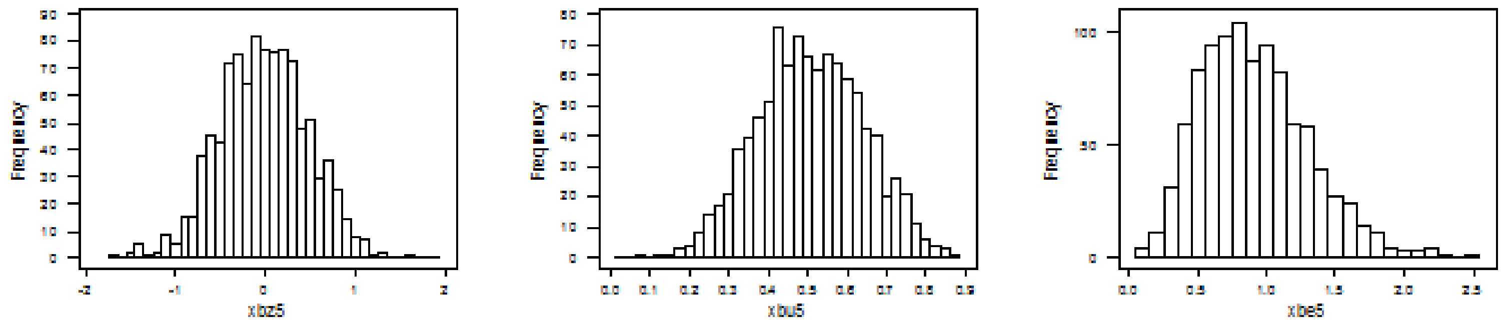
(c) Eksponensial



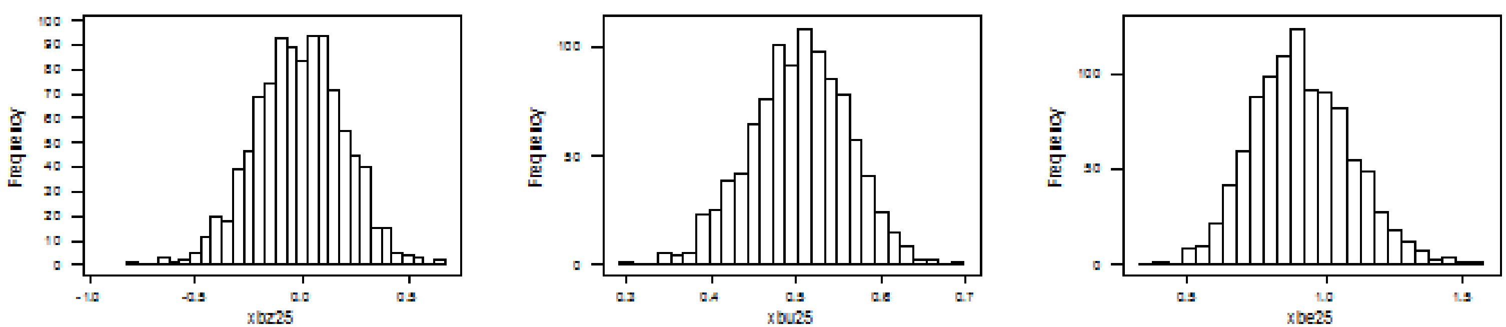




n=2


Frequency
xbz5
Frequency
xbu5
Frequency
xbe5

n=5


Frequency
xbz25
Frequency
xbu25
Frequency
xbe25

n=25

Teladan

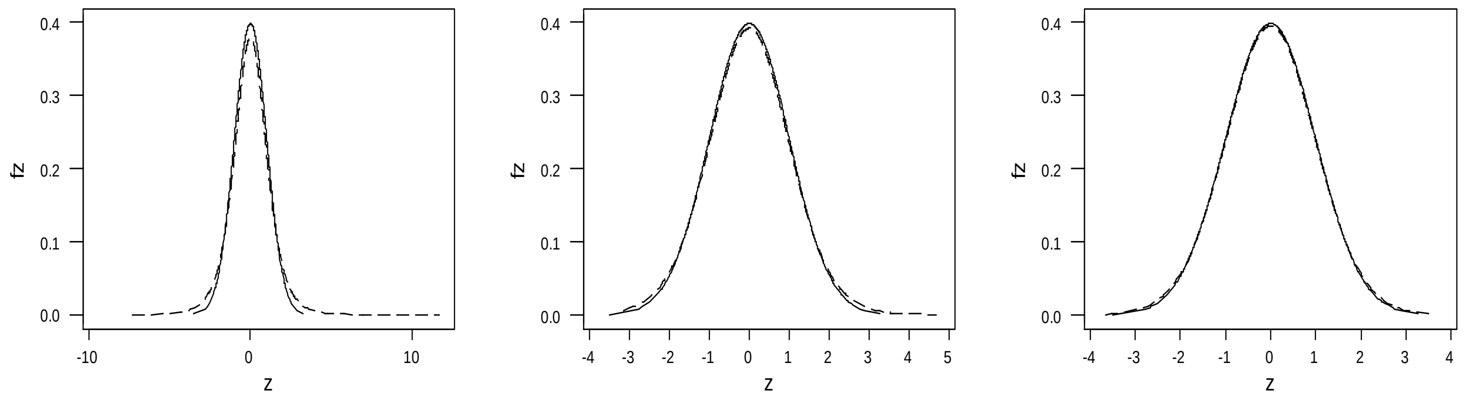
- Sebuah perusahaan memproduksi bohlam. Bila umur bohlam itu menyebar normal dengan nilai tengah 800 jam dan simpangan baku 40 jam, hitunglah peluang bahwa suatu contoh acak 16 bohlam akan mempunyai umur rata-rata kurang dari 775 jam

Sebaran t-student

- Berdasarkan dalil limit pusat, untuk n besar sebaran akan menyebar mengikuti sebaran normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2/n. Namun hal ini mensyaratkan ragam populasi (σ^2) diketahui. Apabila σ^2 tidak diketahui dan diganti dengan penduganya (s^2), maka

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student, dengan db= n-1}$$

- Sebaran t mirip dengan sebaran z, hanya saja sebaran t lebih bervariasi tergantung besarnya derajat bebas s^2



Teladan

- Sebuah perusahaan bohlam menyatakan bahwa bohlam produksinya mencapai umur rata-rata 500 jam. Untuk menjaga nilai rata-rata ini, ia menguji 25 bohlam setiap bulan. Bila nilai t yang diperolehnya jatuh antara $-t_{0.05}$ dan $t_{0.05}$ ia puas. Kesimpulan apa yang ditariknya bila ia memperoleh contoh dengan nilai tengah = 518 jam dan simpangan baku s = 40 jam? Asumsikan umur bohlam itu menyebar normal

SPC : Beda 2 Rataan

- Misalkan terdapat dua populasi, X_1 dan X_2, di mana $X_1 = 3, 5, 7$ dan $X_2 = 0, 3$. Populasi I memiliki $\mu_1 = 5$ dan $\sigma_1^2 = 8/3$, sedangkan populasi II memiliki $\mu_2 = 3/2$ dan $\sigma_2^2 = 9/4$.
- Dengan cara yang sama apabila dilakukan penarikan contoh dengan pengembalian, di mana $n_1=2$ dan $n_2=3$ diperoleh kemungkinan

Populasi I			Populasi II		
No.	Contoh	$\overline{X}_1$	No.	Contoh	$\overline{X}_2$
1	3, 3	3	1	0, 0, 0	0
2	3, 5	4	2	0, 0, 3	1
3	3, 7	5	3	0, 3, 0	1
4	5, 3	4	4	3, 0, 0	1
5	5, 5	5	5	0, 3, 3	2
6	5, 7	6	6	3, 0, 3	2
7	7, 3	5	7	3, 3, 0	2
8	7, 5	6	8	3, 3, 3	3
9	7, 7	7			

- Sehingga sebaran peluang bagi $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$	**frekuensi**	**$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$**
0	1	$\frac{1}{72}$
1	5	$\frac{5}{72}$
2	12	$\frac{12}{72}$
3	18	$\frac{18}{72}$
4	18	$\frac{18}{72}$
5	12	$\frac{12}{72}$
6	5	$\frac{5}{72}$
7	1	$\frac{1}{72}$

$$\mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = 3.5$$

$$\sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \frac{25}{12}$$

- Bila contoh-contoh bebas berukuran n_1 dan n_2 diambil dari dua populasi yang besar atau takhingga, masing-masing dengan rata-rata μ_1 dan μ_2 dan ragam $\sigma_1{}^2$ dan $\sigma_2{}^2$, maka beda kedua nilai tengah contoh, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, akan menyebar normal dengan nilai tengah dan ragam

$$\mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} \qquad \sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Teladan

- Sebaran tinggi anjing terier keturunan tertentu mempunyai nilaitengah 72 cm dan simpangan baku 10 cm, sedangkan sebaran tinggi anjing pudel keturunan tertentu mempunyai nilaitengah 28 cm dan simpangan baku 5 cm. Seandainya nilaitengah contoh dicatat sampai ketelitian berapapun, hitunglah peluang bahwa nilaitengah contoh 64 anjing terier akan melampaui nilaitengah contoh 100 pudel dengan sebanyak-banyaknya 44,2 cm

Selesai