STK 211 Metode statistika

Materi 3 Konsep Dasar Peluang

Pendahuluan

- Banyak kejadian-kejadian di dunia ini yang tidak pasti
- Misal:
  - Akankah hujan sore hari ini?
  - Akankah PSSI menang? dll
- Nilai Kejadian Walaupun **TIDAK PASTI** tetapi memiliki **POLA**
- POLA kejadian diperoleh dari beberapa kali
- → diperoleh ukuran kemungkinan yang disebut sebagai **PELUANG**

Pendahuluan

- Peluang dapat diartikan sebagai ukuran kemungkinan terjadinya suatu kejadian
- Dalam hal ini: Ukuran kemungkinan dinyatakan dalam besaran numerik bernilai antara 0 (nol) sampai 1 (satu)
- 0 → kejadian yang mustahil
- 1 → kejadian yang pasti terjadi

Himpunan/Gugus

- Ruang Contoh & Ruang Kejadian
- Ruang Null (∅)
- Operasi Himpunan: Irisan, Paduan, Komplemen

Ruang Contoh dan Kejadian

- **Ruang Contoh** adalah suatu gugus yang memuat semua hasil yang berbeda, yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
- **Percobaan**

  → merupakan proses yang membangkitkan data.

  Misalnya:

  - Pelemparan sekeping mata uang
  - Pencatatan daya tahan suatu lampu neon

- Notasi dari ruang contoh adalah sebagai berikut:
  - $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, n = banyaknya hasil
  - n bisa terhingga atau tak terhingga
- Contoh:
  - Melempar sebuah dadu : S={1,2,3,4,5,6}
  - Melempar mata uang : S={A,G}
  - Jenis kelamin bayi : S={L,W}
  - Banyaknya lemparan dadu sampai didapat sisi angka 1 : S={1,2,3, … }

- **Ruang kejadian** adalah anak gugus dari ruang contoh, yang memiliki karakteristik tertentu.
  - Ruang kejadian biasanya dinotasikan dengan huruf kapital (A, B, ...).

    Contoh:
    - Sisi Angka muncul dari pelemparan dua buah mata uang:

      A = {AA, AG, GA}
    - Munculnya sisi ganjil pada dadu pertama dari pelemparan dua buah dadu:

      B = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 31, 32, ..., 56}

- Kejadian sederhana → hanya terdiri dari satu titik contoh
  - A: Kejadian munculnya sisi angka pada pelemparan sekeping mata uang
  - A={A}
- Kejadian majemuk → gabungan beberapa kejadian sederhana
  - B: Kejadian umur lampu neon kurang dari 36 jam
  - $B=\{x|0 \le x<36\}$

- **Ruang null (∅)**

  → Suatu anak gugus dari ruang contoh yang tidak mengandung satu pun anggota.

  - Pada percobaan pelemparan dadu bersisi enam apabila didefinisikan A: kejadian munculnya bilangan 7, maka A=∅.

Irisan Dua Kejadian ($\cap$)

- $A \cap B$ → Irisan kejadian A dan B

  → merupakan kejadian yang mengandung semua titik contoh yang terdapat di kejadian A maupun B.

  - Teladan : Pada percobaan pelemparan dadu,
    - A: kejadian munculnya bilangan genap

      $A=\{2, 4, 6\}$
    - B: kejadian munculnya bilangan prima

      $B=\{2, 3, 5\}$
    - $A \cap B=\{2\}$

- Apabila $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B merupakan kejadian yang saling terpisah/menyisihkan (*disjoint/mutually exclusive*)
  - A: kejadian munculnya bilangan genap

    A={2, 4, 6}
  - B: kejadian munculnya bilangan ganjil

    B={1, 3, 5}
  - $A \cap B = \emptyset \rightarrow$ A dan B kejadian yang saling terpisah

Paduan Dua Kejadian ($\cup$)

$A \cup B$ → Paduan kejadian A dan B

- merupakan kejadian yang mencakup semua titik contoh pada kejadian A dan B.
- Teladan:

A: kejadian munculnya bilangan genap

$A = \{2, 4, 6\}$

B: kejadian munculnya bilangan prima

$B = \{2, 3, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Komplemen suatu kejadian (A^c)

- $A^c \rightarrow$ komplemen kejadian A
- $A^c \rightarrow$ merupakan kejadian yang mencakup semua titik contoh di S yang bukan anggota A.
- Teladan:

  A: kejadian munculnya bilangan genap

  A ={2, 4, 6}

  A^c ={1, 3, 5}

Ukuran Suatu Ruang (Banyaknya Anggota)

- Beberapa kaidah untuk menghitung banyaknya anggota ruang contoh/kejadian:
  - Penggandaan
  - Permutasi
  - Kombinasi

- **Penggandaan**
  - Pengandaan dapat digunakan jika setiap kemungkinan dibentuk dari komponen-komponen yang saling bebas.

    $N(S) = n1 \times n2 \times \ldots \times n1$
  - Contoh

    Melempar 3 buah mata uang

    $N(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

    Melempar 2 buah dadu

    $N(S) = 6 \times 6 = 36$

- **Permutasi**
  - Permutasi merupakan kejadian dimana susunan objek yang terpilih diperhatikan.
  - Misalkan memilih orang untuk membentuk kepengurusan suatu organisasi, dimana jika Si A terpilih menempati posisi ketua berbeda maknanya dengan Si A terpilih menempati posisi wakil ketua.
  - Permutasi tingkat r dari n unsur/objek dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{nx(n-1)x(n-2)x\ldots x0!}{(n-r)x(n-r-1)x\ldots x0!}$$

- Teladan

  Dari 5 orang kandidat akan dibentuk susunan pengurus (Ketua, Wakil, Bendahara)

  $N(S) = P^5_3 = 5!/(5-3)! = 60$

- **Kombinasi**
  - Kombinasi merupakan kejadian dimana susunan objek yang terpilih tidak diperhatikan.
  - Misalkan memilih sejumlah orang untuk menempati suatu sejumlah kursi tempat duduk, dimana susunan tempat duduk tidak menjadi perhatian.
  - Kombinasi tingkat r dari n unsur/objek dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{nx(n-1)x(n-2)x\ldots x0!}{(n-r)x(n-r-1)x\ldots x0!xr!}$$

- Teladan

  Dari 5 orang akan dibentuk tim cepat tepat yang beranggotakan 3 orang.

$N(S) = C^5_3 = 5!/(5-3)!3! = 10$

Peluang Kejadian

- Peluang dinotasikan dengan P(A) sebagai peluang kejadian A.
- **Definisi Klasik:**
  - **Peluang** suatu kejadian adalah rasio antara banyaknya kejadian n(A) dengan ukuran ruang contoh n(S)
- Jika ruang contoh tak hingga → limit
- Tetapi, limit suatu fungsi belum tentu ada.
- Diatasi menggunakan Aksioma

Peluang Kejadian

- Beberapa kaidah sebaran peluang (aksioma), yaitu:

1. $0 \leq p(xi) \leq 1$, untuk i=1,2, ..., n. n bisa tak hingga
2. Jumlah peluang seluruh kejadian dalam ruang contoh adalah 1

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

3. p(A1 U A2 U ...U Am) = p(A1)+p(A2)+...+p(Am), jika A1, A2, ..., Am merupakan kejadian-kejadian yang terpisah.

Teladan:

1. Sebuah dadu dilempar, maka ruang contohnya:

   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(S)=6$

   jika setiap sisi seimbang maka peluangnya

   $p(1)=p(2)=....=p(6)=1/6$

2. Sebuah kejadian yang diharapkan adalah sisi yang muncul kurang atau sama dengan empat maka ruang kejadiannya:

   $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $n(A) = 4$

   Maka peluang kejadian A adalah:

   $P(A) = 4/6 = 2/3$

Kejadian Saling Bebas

- Kejadian saling bebas adalah kejadian-kejadian yang tidak saling mempengaruhi.
- Peluang dari dua buah kejadian yang saling bebas adalah:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

- Teladan:
  - Peluang bayi berjenis kelamin laki-laki diketahui 0.6. Jika jenis kelamin anak pertama (A) dan kedua (B) saling bebas, berapa peluang jenis kelamin anak pertama dan anak kedua laki-laki?

    $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.6 * 0.6 = 0.36$

Peluang Bersyarat

- Peluang bersyarat adalah peluang suatu kejadian (A) jika kejadian lain (B) diketahui telah terjadi.
- Peluang A bersyarat B dinotasikan P(A|B), dimana:

  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

- Jika kejadian A dengan B saling bebas maka,

  $P(A|B)=P(A)$

Sebuah kotak berisi 5 bola merah dan 4 bola biru. Jika diambil 2 bola satu persatu tanpa pengembalian, tentukan peluang terambil bola merah pada pengambilan pertama dan bola biru pada pengambilan kedua.

Jawab

Pada pengambilan pertama tersedia 5 bola merah dari 9 bola sehingga $P(M) = 5/9$. Karena tidak dikembalikan, maka pengambilan kedua jumlah bola yang tersedia sisa 8, sehingga peluang terambilnya bola biru dengan syarat bola merah telah terambil pada pengambilan pertama adalah $P(B|M) = 4/8$

Jadi, peluang terambilnya bola merah pada pengambilan pertama dan biru pada pengambilan kedua adalah:

$$P(M \cap B) = P(M) \times P(B|M)$$

$$= 5/9 \times 4/8$$

$$= 5/18$$

Teorema Bayes

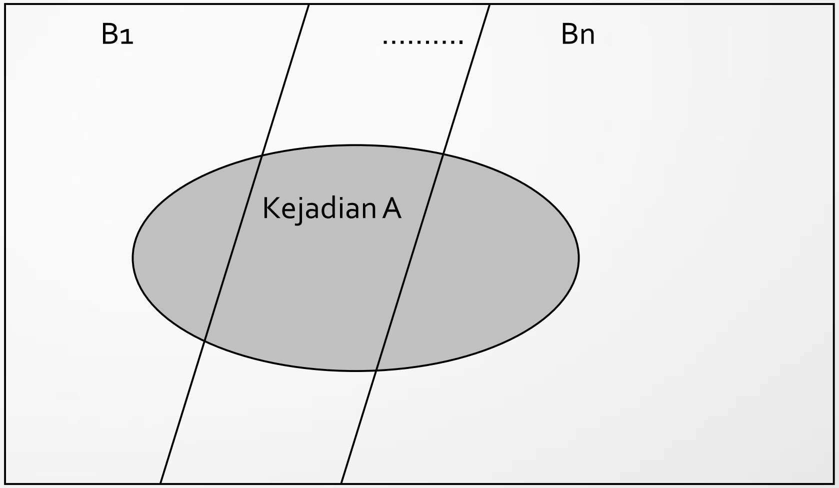
- Suatu gugus universum disekat menjadi beberapa anak gugus B1, B2, ..., Bn dan A suatu kejadian pada U dengan p(B)≠0 maka,

  $P(A) = \Sigma\ P(Bi)P(A|Bi)$

- Peluang B_k bersyarat A, dapat dihitung sebagai berikut:

  $P(B_k|A) = P(B_k \cap A)/\ P(A)$

- Perhatikan diagram berikut:
  - Ruang contoh dipecah menjadi kejadian B1, B2,…,Bn saling terpisah
  - Disamping itu ada kejadian A, yang dapat terjadi pada kejadian B1, B2,…,Bn. Dengan demikian, $A=(A\cap B1) + (A\cap B2) + \ldots + (A\cap Bn)$
  - Peluang kejadian A adalah: $P(A)=P(A\cap B1) + P(A\cap B2) + \ldots + P(A\cap Bn)$
  - Dengan memanfaatkan sifat peluang bersyarat, diperoleh peluang Bk bersyarat A adalah:



$$P(Bk|A) = P(Bk)P(A|Bk)/ \Sigma\, P(Bi)P(A|Bi)$$

- Teladan:

  Kota Bogor disebut kota hujan karena peluang terjadinya hujan (H) cukup besar yaitu sebesar 0.6. Hal ini menyebabkan para mahasiswa harus siap-siap dengan membawa payung (P). Peluang seorang mahasiswa membawa payung jika hari hujan 0.8, sedangkan jika tidak hujan 0.4. Maka peluang hari akan hujan jika diketahui mahasiswa membawa payung adalah:

Informasi :

P(H) = 0.6

P(TH) = 1-0.6=0.4

P(P|H) = 0.8

P(P|TH) = 0.4

Jadi, $$P(H \mid P) = \frac{P(H)P(P \mid H)}{P(H)P(P \mid H) + P(TH)P(P \mid TH)}$$

$$P(H \mid P) = \frac{0.6x0.8}{0.6x0.8 + 0.4x0.4} = \frac{0.48}{0.48 + 0.16} = \frac{0.48}{0.64}$$

- Tiga kandidat CAGUB siap bertarung supaya terpilih menjadi Gubernur. Berdasarkan jajak pendapat Peluang Kandidat 1 terpilih adalah 0.4. Peluang Kandidat 2 terpilih adalah 0.3 dan peluang Kandidat 3 terpilih adalah 0.3. Seandainya Kandidat 1 terpilih maka peluang kenaikan PBB adalah 0.5, kandidat 2 dan 3 masing-masing 0.3 dan 0.4 Berapa peluang Kandidat 1 terpilih setelah terjadinya kenaikan PBB.

  Jawab:

  A : PBB dinaikkan

  B1 : Kandidat 1 terpilih

  B2 : Kandidat 2 terpilih

  B3 : Kandidat 3 terpilih

- $P(B_1)\,P(A|B_1) = (0.4)(0.5) = 0.20$
- $P(B_2)\,P(A|B_2) = (0.3)(0.3) = 0.09$
- $P(B_3)\,P(A|B_3) = (0.3)(0.4) = 0.12$

$$P(B1 \mid A) = \frac{0.20}{0.20 + 0.09 + 0.12} = 0.49$$

Selesai