STK511
ANALISIS STATISTIKA

Materi 6: Pengujian Hipotesis

https://www.stat.ipb.ac.id/agusms/

Outline Materi

- Pengantar Pengujian Hipotesis
- Pengujian Parameter Nilai Tengah:
  - Satu Populasi
  - Dua Populasi
  - Data Berpasangan
- Pengujian Parameter Proporsi:
  - Satu Populasi
  - Dua Populasi
- Pengujian Ragam

Pengantar Pengujian Hipotesis

IPB University
Bogor Indonesia

- Dalam mempelajari Karakteristik Populasi kita sering telah memiliki pernyataan/anggapan tertentu.
    - pemberian DHA pada anak-anak akan menambah kecerdasannya atau
    - pemberian vaksin polio akan mengurangi jumlah anak-anak yang menderita penyakit ini

- Diperlukan pengumpulan data
    - Apakah data mendukung pernyataan/anggapan tersebut

Pengantar Pengujian Hipotesis

- Suatu pernyataan / anggapan yang mempunyai nilai mungkin benar / salah atau suatu pernyataan /anggapan yang mengandung nilai ketidakpastian → Hipotesis
- Hipotesis dalam statistika dinyatakan dalam dua bentuk yaitu:
  - H_0 (hipotesis nol): suatu pernyataan / anggapan yang umumnya ingin kita tolak
  - H_1 / H_A (hipotesis alternatif): pernyataan lain yang akan diterima jika H_0 ditolak

Kesalahan dalam Keputusan

- Pengambilan keputusan akan memunculkan dua jenis kesalahan yaitu:
  - Salah jenis I (Error type I) : kesalahan akibat menolak H_0 padahal H_0 benar
  - Salah jenis II (Error type II) : kesalahan akibat menerima H_0 padahal H_1 benar

- Besarnya peluang kesalahan dapat ini dapat dihitung sebagai berikut:
  - P(salah jenis I) = P(tolak H_0 | H_0 benar) = α
  - P(salah jenis II) = P(terima H_0 | H_1 benar) = β

Kesalahan dalam Keputusan

	H_0 benar	H_0 salah
Tolak H_0	Peluang salah jenis I (Taraf nyata; α)	Kuasa pengujian ($1-\beta$)
Terima H_0	Tingkat kepercayaan ($1-\alpha$)	Peluang salah jenis II (β)

Pengantar Pengujian Hipotesis

- Pada kenyataannya parameter populasi sering kali tidak diketahui
- Sehingga dalam pengujian hipotesis hanya nilai salah jenis I (α) yang dapat dikendalikan.
- Akan timbul pertanyaan :
  – Berapa nilai α yang digunakan?

Tergantung resiko keputusan yang akan diambil

Langkah-langkah Dalam Pengujian Hipotesis

1. Tuliskan hipotesis yang akan diuji

- Hipotesis satu arah
  - $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$
- Hipotesis dua arah
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Langkah-langkah Dalam Pengujian Hipotesis

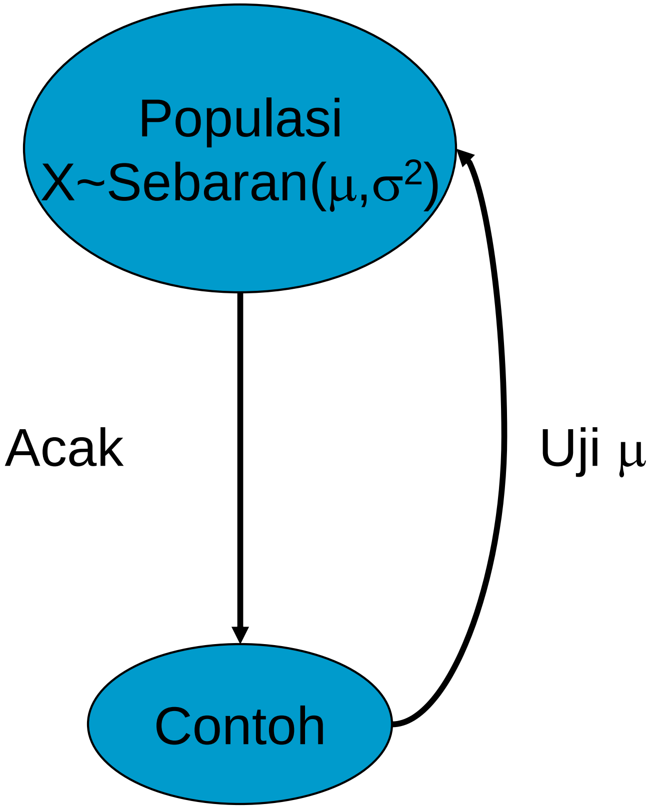
2. Tetapkan tingkat kesalahan/Peluang salah jenis I/taraf nyata → α
3. Deskripsikan data contoh yang diperoleh (hitung rataan, ragam, standard error dll)
4. Hitung statistik ujinya

   Statistik uji yang digunakan sangat tergantung pada sebaran statistik dari penduga parameter yang diuji
5. Tentukan daerah kritis atau daerah penolakan H0

   Daerah penolakan H0 sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H1)
6. Tarik keputusan dan kesimpulan

Pengujian Nilai Tengah: Satu Populasi

- Suatu contoh acak diambil dari satu populasi Normal berukuran *n*
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ sebesar nilai tertentu, katakanlah μ_0



Hipotesis yang dapat diuji

- Hipotesis satu arah:
  - $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$
- Hipotesis dua arah:
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Statistik uji

- Jika ragam populasi (σ^2) diketahui (jika X bukan sebaran normal → *n* besar) :

$$z_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Jika ragam populasi (σ^2) tidak diketahui dan X~Normal:

$$t_h = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Daerah kritis pada taraf nyata (α)

- Besarnya taraf nyata sangat tergantung dari bidang yang sedang dikaji
- Daerah penolakan H_0 sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H_1) dan statistik uji

H1: $\mu < \mu_0$ ➔ Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$ atau $t_h < -t_{(\alpha;\ db=n-1)}$

H1: $\mu > \mu_0$ ➔ Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$ atau $t_h > t_{(\alpha;\ db=n-1)}$

H1: $\mu \neq \mu_0$ ➔ Tolak H_0 jika $|z_h| > z_{\alpha/2}$ atau $|t_h| > t_{(\alpha/2;\ db=n-1)}$

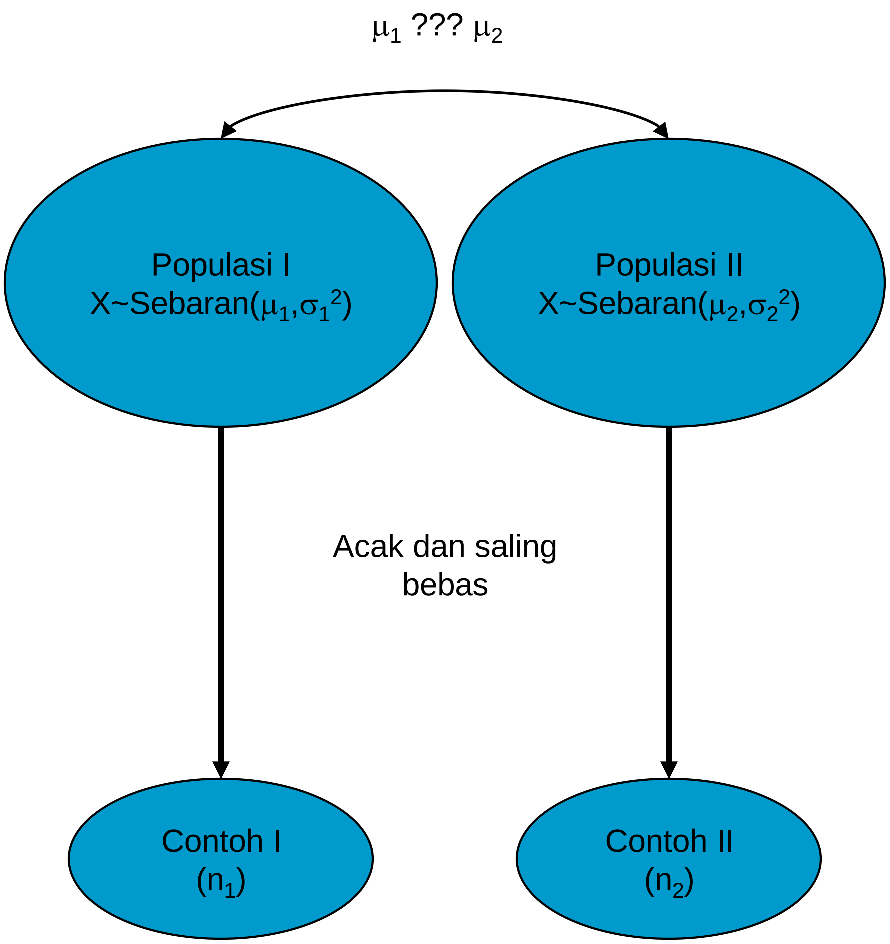
Teladan

- Batasan yang ditentukan oleh pemerintah terhadap emisi gas CO kendaraan bermotor adalah 50 ppm. Sebuah perusahaan baru yang sedang mengajukan ijin pemasaran mobil, diperiksa oleh petugas pemerintah untuk menentukan apakah perusahan tersebut layak diberikan ijin. Sebanyak 20 mobil diambil secara acak dan diuji emisi CO-nya. Dari data yang didapatkan, rata-ratanya adalah 55 dan ragamnya 4.2. dengan menggunakan taraf nyata 5%, layakkah perusahaan tersebut mendapat ijin ?

Pengujian Nilai Tengah: Dua Populasi

Membandingkan Nilai Tengah Dua Populasi:

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran tertentu (bisa sama, bisa juga tidak sama)
- Pengambilan kedua contoh saling bebas
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama atau tidak dengan parameter μ_2



Bentuk Hipotesis

- Hipotesis
  - Hipotesis satu arah:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$$

  - Hipotesis dua arah:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$$

Statistik Uji

- Jika ragam kedua populasi diketahui katakan σ_1^2 dan σ_2^2 (jika X bukan normal → *n* besar):

$$z_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

- Jika X ~ Normal dan ragam populasi tidak diketahui:

$$t_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$db = \begin{cases} n1 + n2 - 2; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ db_{efektif}; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \begin{cases} s_g \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Daerah kritis pada taraf nyata (α)

- Pada prinsipnya sama dengan kasus satu contoh, dimana daerah penolakan H_0 sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H_1) dan statistik uji:

H1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ ➔ Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$ atau $t_h < -t_{(\alpha;\ db=n-1)}$

H1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ ➔ Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$ atau $t_h > t_{(\alpha;\ db=n-1)}$

H1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ ➔ Tolak H_0 jika $|z_h| > z_{\alpha/2}$ atau $|t_h| > t_{(\alpha/2;\ db=n-1)}$

Teladan

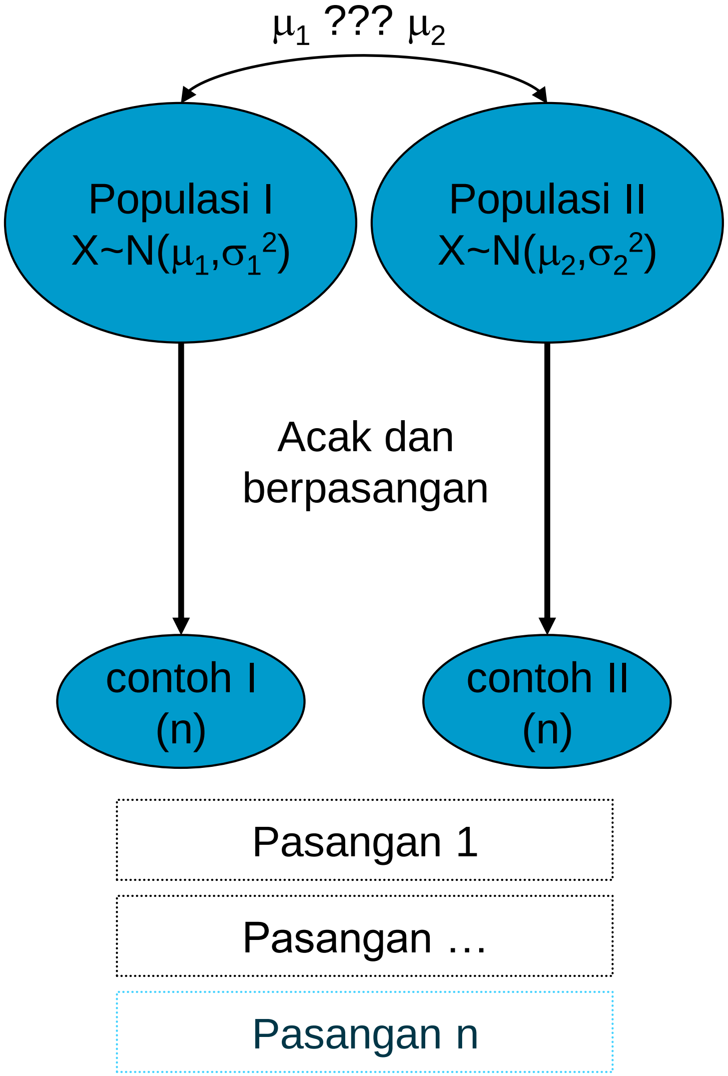
- Dua buah perusahaan yang saling bersaing dalam industri kertas karton saling mengklaim bahwa produknya yang lebih baik, dalam artian lebih kuat menahan beban. Untuk mengetahui produk mana yang sebenarnya lebih baik, dilakukan pengambilan data masing-masing sebanyak 10 lembar, dan diukur berapa beban yang mampu ditanggung tanpa merusak karton. Datanya adalah :

Persh. A	30	35	50	45	60	25	45	45	50	40
Persh. B	50	60	55	40	65	60	65	65	50	55

- Ujilah karton produksi mana yang lebih kuat dengan asumsi ragam kedua populasi berbeda, gunakan taraf nyata 10%

Pengujian Nilai Tengah: Data Berpasangan

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran n (wajib sama)
- Pengambilan kedua contoh berpasangan, ada pengkait antar kedua contoh (bisa waktu, objek, tempat, dll)
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



Bentuk Hipotesis

- Apabila $D=X_1-X_2$, maka hipotesis statistika:
- Hipotesis satu arah:

$$H_0: \mu_D \geq \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_D < \delta_0$$

$$H_0: \mu_D \leq \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_D > \delta_0$$

- Hipotesis dua arah:

$$H_0: \mu_D = \delta_0 \text{ vs } H_1: \mu_D \neq \delta_0$$

Statistik Uji

$$t_h = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

- Dalam hal ini $\bar{d}$ adalah rata-rata simpangan antar pengamatan pada contoh pertama dengan contoh kedua

Pasangan	1	2	3	…	n
contoh 1 (X_1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}
contoh 2 (X_2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}
D = (X_1-X_2)	d_1	d_2	d_3		d_n

- Daerah Kritik → Sama seperti Pengujian Nilai Tengah Satu Populasi

Teladan

- Suatu klub kesegaran jasmani ingin mengevaluasi program diet, kemudian dipilih secara acak 10 orang anggotanya untuk mengikuti program diet tersebut selama 3 bulan. Data yang diambil adalah berat badan sebelum dan sesudah program diet dilaksanakan, yaitu:

Berat Badan	Peserta									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sebelum (X1)	90	89	92	90	91	92	91	93	92	91
Sesudah (X2)	85	86	87	86	87	85	85	87	86	86
D=X1-X2	5	3	5	4	4	7	6	6	6	5

- Apakah program diet tersebut dapat mengurangi berat badan lebih dari 5 kg? Lakukan pengujian pada taraf nyata 5%!

Pengujian Proporsi: Satu Populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - $H_0 : p = p_0$
  - $H_1 : p < p_0$ | $H_1 : p > p_0$ | $H_1 : p \neq p_0$
- Merupakan sebaran binomial
- Jika *n* besar (atau *n.p dan n.p.q ≥ 5*) → sebaran Z
- Statistik-uji : $Z_h = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p(1-p)}{n}$$

- Karena p tidak diketahui, maka digunakan p_0
- Daerah Kritik :
  - $H_1: p < p_0 \rightarrow Z_h < -Z_\alpha$
  - $H_1: p > p_0 \rightarrow Z_h > Z_\alpha$
  - $H_1: p \neq p_0 \rightarrow |Z_h| > Z_{\alpha/2}$

Teladan

Seorang produsen mengklaim bahwa paling tidak 95% produknya bebas-rusak. Pemeriksaan terhadap contoh acak produknya dengan n = 600 menunjukkan bahwa 39 di antaranya rusak. Uji pernyataan produsen tersebut.

Pengujian Proporsi: Dua Populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$
  - $H_1 : p_1 - p_2 < p_0$ | $H_1 : p_1 - p_2 > p_0$ | $H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0$

- Merupakan sebaran binomial
- Jika *n* besar (atau *n.p dan n.p.q ≥ 5*) → sebaran Z
- Statistik-uji : $Z_h = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - p_0}{\sqrt{p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2)}}$

Pengujian Proporsi: Dua Populasi

- Karena p tidak diketahui, maka digunakan

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

- Daerah Kritik :
  - H_1: $p_1 < p_2$ → $Z_h < -Z_\alpha$
  - H_1: $p_1 > p_2$ → $Z_h > Z_\alpha$
  - H_1: $p_1 \neq p_2$ → $|Z_h| > Z_{\alpha/2}$

Teladan

- Suatu Obat penenang diduga hanya 60% efektif. Hasil percobaan dengan obat baru terhadap 100 orang dewasa menunjukkan 70% obat tersebut efektif. Apakah ini bukti bahwa obat baru lebih baik dari yang beredar sekarang? Gunakan taraf nyata 5%.

Pengujian Ragam: Satu populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - Satu Arah:

H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\quad$ H_0 : $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$

H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\quad$ H_1 : $\sigma^2 < \sigma_0^2$

  - Dua Arah:

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- Statistik uji : $\chi^2_{hit} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(db=n-1)}$

- Kriteria penolakan H_0

1. H_0: $\sigma^2 \leq \sigma^2_0$ → Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$

2. H_0: $\sigma^2 \geq \sigma^2_0$ → Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$

3. H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$ → Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha/2}$ atau $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha/2}$

   H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$

Teladan

- Sebuah perusahaan aki mobil mengatakan bahwa umur aki mobil yang diproduksinya mempunyai simpangan baku 0.9 tahun. Bila suatu contoh acak 10 aki menghasilkan simpangan baku s = 1.2 tahun, apakah menurut Anda $\sigma > 0.9$ tahun?

Pengujian Ragam: Dua populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - Satu Arah:

$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\quad$ $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\quad$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

  - Dua Arah:

$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Statistik uji : $f_{hit} = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \sim f_{(db_1=n_1-1;db_2=n_2-1)}, s_1^2 > s_2^2$

Pengujian Ragam: Dua populasi

- Kriteria penolakan H_0

1. $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ⟶ Tolak H_0 jika $f_{hit} > f_{\alpha(db1;db2)}$
   $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
2. $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ ⟶ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha(db1;db2)}$
   $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$
3. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ⟶ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha/2(db1;db2)}$ atau $f_{hit} > f_{\alpha/2(db1;db2)}$
   $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Teladan

Pada percobaan pengaruh penyinaran terhadap pertumbuhan suatu tanaman, didapatkan hasil biomassa sbb:

Kelompok	n	$\overline{X}$	s
Penyinaran normal	9	5.3	1.10
Penyinaran dengan filter	10	2.1	0.69

Ujilah apakah ragam biomassa tanaman yang mendapatkan penyinaran normal sama dengan tanaman yang mendapatkan penyinaran dengan filter.

Selesai...