Metode Statistika

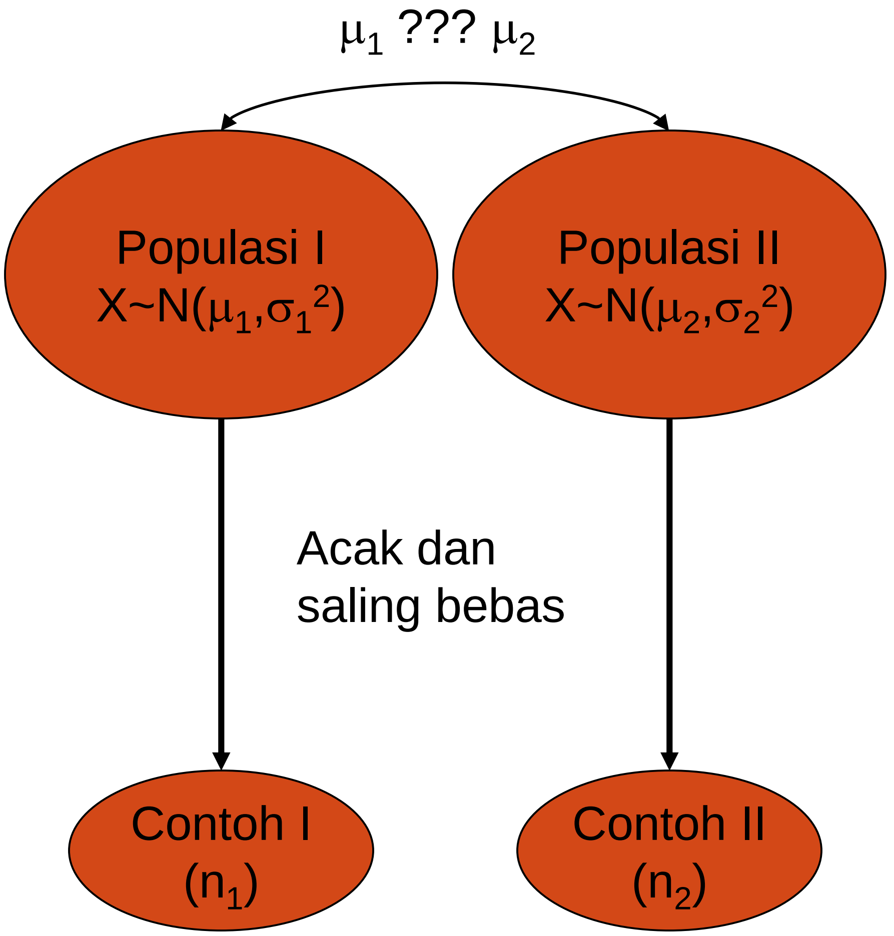
Materi 7 : Statistika Inferensia

Pengujian Hipotesis

Perbandingan Nilai Tengah Dua Populasi

Kasus Dua Contoh Saling Bebas

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran tertentu (bisa sama, bisa juga tidak sama)
- Pengambilan kedua contoh saling bebas
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



- Hipotesis
  - Hipotesis satu arah:

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$
  - Hipotesis dua arah:

    $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

- Statistik uji:
  - Jika ragam kedua populasi diketahui katakan σ_1^2 dan σ_2^2 :

$$z_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

  - Jika ragam kedua populasi tidak diketahui:

$$t_h = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$db = \begin{cases} n1 + n2 - 2 ; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ db_{efektif} \quad ; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \begin{cases} s_g \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} ; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}} ; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

- Daerah kritis pada taraf nyata (α)
  - Pada prinsipnya sama dengan kasus satu contoh, dimana daerah penolakan H_0 sangat tergantung dari bentuk hipotesis alternatif (H_1) dan statistik uji

H1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ ➔ Tolak H0 jika $z_h < -z_\alpha$ (tabel) atau $t_h < -t_{(\alpha;\, db)}$(tabel)

H1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ ➔ Tolak H0 jika $z_h > z_{\alpha;}$(tabel) atau $t_h > t_{(\alpha;\, db)}$(tabel)

H1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ ➔ Tolak H0 jika $|z_h| > z_{\alpha/2}$(tabel) atau

$|t_h| > t_{(\alpha/2;\, db)}$(tabel)

Teladan

- Dua buah perusahaan yang saling bersaing dalam industri kertas karton saling mengklaim bahwa produknya yang lebih baik, dalam artian lebih kuat menahan beban. Untuk mengetahui apakah kedua produk sebenarnya sama, dilakukan pengambilan data masing-masing sebanyak 10 lembar, dan diukur berapa beban yang mampu ditanggung tanpa merusak karton. Datanya adalah :

Persh. A	30	35	50	45	60	25	45	45	50	40
Persh. B	50	60	55	40	65	60	65	65	50	55

- Ujilah apakah karton produksi kedua perusahaan berbeda dengan asumsi ragam kedua populasi berbeda dan pop asal menyebar normal, gunakan taraf nyata 10%

Jawab:

- Rata-rata dan ragam kedua contoh:

$$\bar{x}_1 = \frac{30 + 35 + \ldots + 40}{10} = 42,5 \qquad s_1^2 = \frac{n\sum x_1^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{10(19025) - (425)^2}{10(9)} = 106.94$$

$$\bar{x}_2 = \frac{50 + 60 + \ldots + 55}{10} = 56,5 \qquad s_2^2 = \frac{n\sum x_2^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{10(32525) - (565)^2}{10(9)} = 66.94$$

- Perbandingan kekuatan karton
  - Hipotesis:
    - H_0: $\mu_1 = \mu_2$ vs H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

- Statistik uji: (ragam populasi tidak diketahui dan diasumsikan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$t_h = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{(s_2^2 / n_2) + (s_1^2 / n_1)}} = \frac{56,5 - 42,5 - 0}{\sqrt{66,94/10 + 106,94/10}} = 3,36$$

$$db = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)} = \frac{(10.34^2/10 + 8.18^2/10)^2}{(10.34^2/10)^2/9 + (8.18^2/10)^2/9}$$

$$= 17,10 \approx 17$$

- Daerah kritis pada taraf nyata 10%:

  Tolak H_0 jika $|t_h| > t_{(0,05;17)} = 1,740$

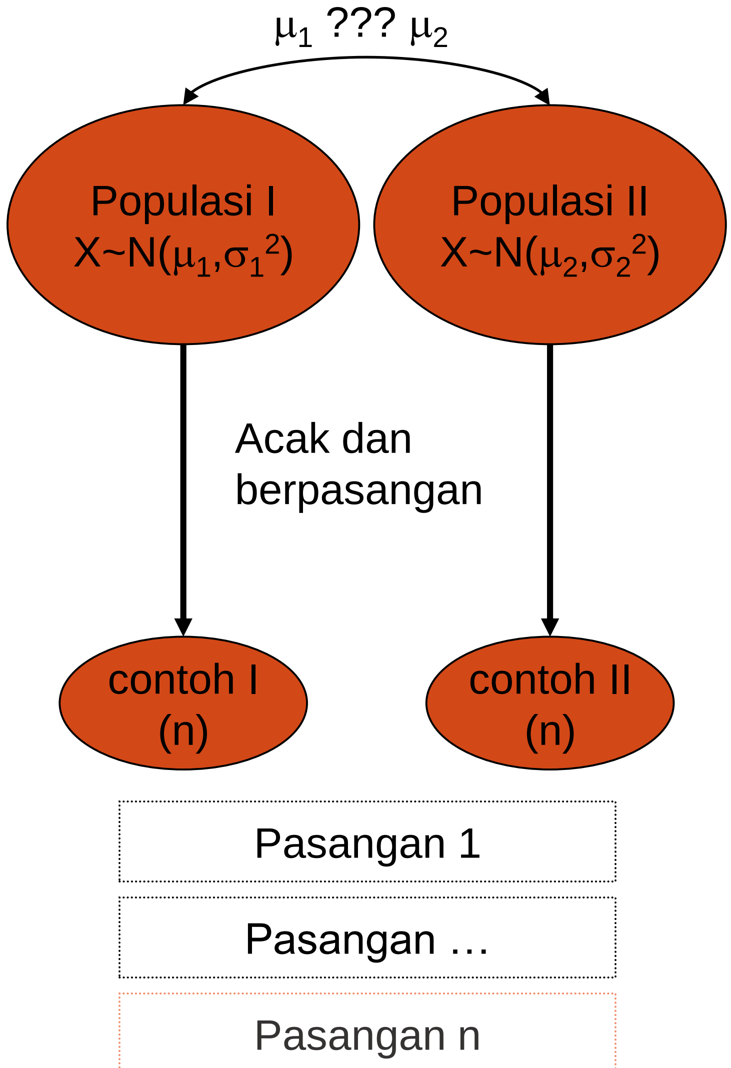
- Kesimpulan:

  Tolak H_0, artinya kekuatan karton kedua perusahaan berbeda nyata pada taraf nyata 10%. Diduga karton yang diproduksi oleh perusahaan B lebih kuat daripada karton A

Perbandingan Nilai Tengah Dua Populasi Berpasangan

Kasus Dua contoh Saling Berpasangan

- Setiap populasi diambil contoh acak berukuran n (wajib sama)
- Pengambilan kedua contoh berpasangan, ada pengkait antar kedua contoh (bisa waktu, objek, tempat, dll)
- Tujuannya adalah menguji apakah parameter μ_1 sama dengan parameter μ_2



- Apabila D=X1-X2, maka hipotesis statistika:
  - Hipotesis satu arah:

    $H_0: \mu_D = \delta_0$ vs $H_1: \mu_D < \delta_0$

    $H_0: \mu_D = \delta_0$ vs $H_1: \mu_D > \delta_0$
  - Hipotesis dua arah:

    $H_0: \mu_D = \delta_0$ vs $H_1: \mu_D \neq \delta_0$

- Statistik uji: $$t_h = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

Dimana adalah rata-rata simpangan antar pengamatan pada contoh pertama dengan contoh kedua

Pasangan	1	2	3	…	n
contoh 1 (X_1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}
contoh 2 (X_2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}
$D = (X_1-X_2)$	d_1	d_2	d_3		d_n

- Daerah Kritis: (lihat kasus satu contoh)

- Ilustrasi

Suatu klub kesegaran jasmani ingin mengevaluasi program diet, kemudian dipilih secara acak 10 orang anggotanya untuk mengikuti program diet tersebut selama 3 bulan. Data yang diambil adalah berat badan sebelum dan sesudah program diet dilaksanakan, yaitu:

Berat Badan	Peserta									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sebelum (X1)	90	89	92	90	91	92	91	93	92	91
Sesudah (X2)	85	86	87	86	87	85	85	87	86	86
D=X1-X2	5	3	5	4	4	7	6	6	6	5

Apakah program diet tersebut dapat mengurangi berat badan lebih dari 5 kg? Lakukan pengujian pada taraf nyata 5%!

Jawab:

- Karena kasus ini merupakan contoh berpasangan, maka:
- Hipotesis:

$$H0 : \mu_D = 5 \text{ vs } H1 : \mu_D > 5$$

- Deskripsi:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{51}{10} = 5,1$$

$$\boxed{s_d^2 = \frac{n\sum d_i^2 - \left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{10(273) - (51)^2}{10(9)} = 1,43}$$

$$s_d = \sqrt{1,43} = 1,20$$

- Statistik uji:

$$\boxed{t = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{5,1 - 5}{1,20 / \sqrt{10}} = 0,26}$$

- Daerah kritis pada $\alpha=5\%$

  Tolak H_0, jika $t_h > t_{(\alpha=5\%, db=9)} = 1.833$

- Kesimpulan:

  Terima H_0, artinya data belum mendukung program diet tersebut dapat mengurangi berat badan lebih dari 5 kg

Pengujian Proporsi Satu Populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - $H_0 : \pi = p_0$
  - $H_1 : \pi < p_0 \quad | \quad H_1 : \pi > p_0 \quad | \quad H_1 : \pi \neq p_0 \quad ;$
- Jika n besar → sebaran Z
- Statistik-uji : $Z_h =$

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\pi(1 - \pi)}{n}$$

- Karena p tidak diketahui, maka digunakan p_0
- Daerah Kritik :
  - $H1: \pi < p_0 \rightarrow Z_h < -Z_\alpha$
  - $H1: \pi > p_0 \rightarrow Z_h > Z_\alpha$
  - $H1: \pi \neq p_0 \rightarrow |Z_h| > Z_{\alpha/2}$

Teladan

- Seorang produsen mengklaim bahwa paling tidak 95% produknya bebas-rusak. Pemeriksaan terhadap contoh acak produknya dengan $n = 600$ menunjukkan bahwa 39 di antaranya rusak. Uji pernyataan produsen tersebut.

Pengujian Proporsi Dua Populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = p_0$
  - $H_1 : \pi_1 - \pi_2 < p_0$ | $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > p_0$ | $H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq p_0$
- Jika n besar → sebaran Z
- Statistik-uji : $Z_h = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - p_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)\left(1/n_1 + 1/n_2\right)}}$
  - dimana π diduga oleh : $\hat{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$

- Daerah Kritik :
  - H1: $\pi_1 < \pi_2 \rightarrow Z_h < -Z_\alpha$
  - H1: $\pi_1 > \pi_2 \rightarrow Z_h > Z_\alpha$
  - H1: $\pi_1 \neq \pi_2 \rightarrow |Z_h| > Z_{\alpha/2}$

Teladan

- Suatu Obat penenang diduga hanya 60% efektif. Hasil percobaan dengan obat baru terhadap 100 orang dewasa menunjukkan 70% obat tersebut efektif. Apakah ini bukti bahwa obat baru lebih baik dari yang beredar sekarang? Gunakan taraf nyata 5%.

Pengujian Ragam Satu populasi

- Bentuk Hipotesis:
  - Satu Arah:

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

  - Dua Arah:

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

- Statistik uji :

$$\chi^2_{hit} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(db = n-1)}$$

- Kriteria penolakan H_0

1. H_0: $\sigma^2 \leq \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$

2. H_0: $\sigma^2 \geq \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha}$

   H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$

3. H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} < \chi^2_{1-\alpha/2}$ atau $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\alpha/2}$

   H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$

Teladan

- Sebuah perusahaan aki mobil mengatakan bahwa umur aki mobil yang diproduksinya mempunyai simpangan baku 0.9 tahun. Bila suatu contoh acak 10 aki menghasilkan simpangan baku $s = 1.2$ tahun, apakah menurut Anda $\sigma > 0.9$ tahun?

Pengujian Ragam Dua populasi

- Bentuk Hipotesis:

  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

  - Satu Arah:

    $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\qquad$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

  - Dua Arah:

    $H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Statistik uji :

$$f_{hit} = \frac{\max(s_1^2, s_2^2)}{\min(s_1^2, s_2^2)} \sim f_{(db_1 = n_1 - 1;\ db_2 = n_2 - 1)}$$

- Kriteria penolakan H_0

1. H_0: $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} > f_{\alpha(db1;db2)}$

   H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

2. H_0: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha(db1;db2)}$

   H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

3. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\longrightarrow$ Tolak H_0 jika $f_{hit} < f_{1-\alpha/2(db1;db2)}$ atau $f_{hit} > f_{\alpha/2(db1;db2)}$

   H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Teladan

Pada percobaan pengaruh penyinaran terhadap pertumbuhan suatu tanaman, didapatkan hasil biomassa sbb:

Kelompok	n	$\overline{X}$	s
Penyinaran normal	9	5.3	1.10
Penyinaran dengan filter	10	2.1	0.69

Ujilah apakah ragam biomassa tanaman yang mendapatkan penyinaran normal sama dengan tanaman yang mendapatkan penyinaran dengan filter.

SELESAI ...